

# Rešenja zadataka pismenog ispita iz Numeričkih metoda

1. Odredjujemo broj značajnih cifara kojim je određena vrednost  $\log$  na intervalu  $[.001, 5]$  pod pretpostavkom da je argument funkcije zadat sa 5 značajnih cifara.
  - a) Odrediti teorijski broj značajnih cifara vrednosti funkcije  $\log$  u funkciji broja značajnih cifara argumenta funkcije.
  - b) Napisati `script` u `Matlabu` i prikazati grafičku zavisnost broja značajnih cifara funkcije  $\log$  u funkciji vrednosti argumenta sa korakom `.0005`
  - c) Nacrtati na jednoj slici teorijski dobijenu ocenu i eksperimentom. Uporediti vrednosti dobijene teorijski i eksperimentom.

**Rešenje.** a) Broj značajnih cifara vrednosti funkcije u funkciji značajnih cifara vrednosti argumenta funkcije na sledeći način

$$r_f \leq \frac{|x| |f'(x)|}{|f(x)|} r_x, \quad z_f \geq -\log_{10} \left| \frac{1}{\log x} \right| + z_x = z_x + \log_{10} |\log(x)|, \quad z_f \geq 5 + \log_{10} |\log(x)|,$$

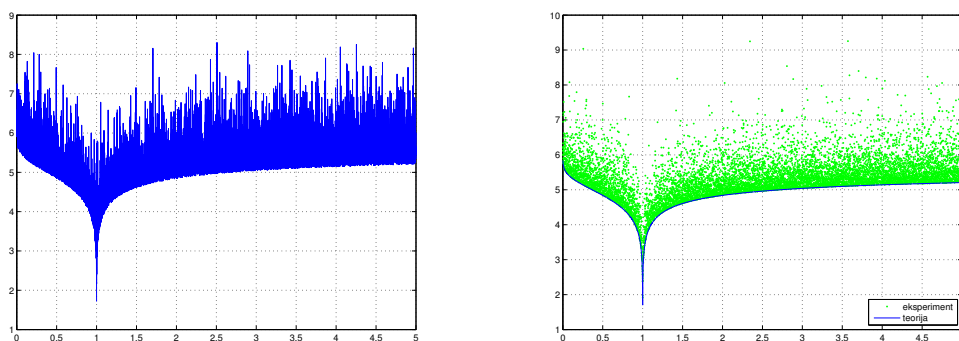
gde smo iskoristili činjenicu da odredjujemo grešku u vrednosti funkcije  $\log$ .

b) Možemo koristiti recimo sledeći `script`

```
h=.0005;
x=[.001:h:5];
f=log(x);
fE=log(x.*(1+10^(-5)*(2*rand(1,length(x))-1)));
plot(x,-log10(abs(fE./f-1)),'-',x,5+log10(abs(log(x))), '--');
legend('eksperiment','teorija','Location','southeast');
grid on;
```

Primetite da je vrednost argumenta zadata sa 5 značajnih cifara, znači da je gornja granica relativne greške argumenta  $10^{-5}$ . Dobijamo grafik prikazan na slici 1 levo.

c) Na slici 1 desno, prikazana je funkcija teorijske zavisnosti i eksperimentnalnih rezultata broja značajnih cifara u funkciji argumenta. Vidimo da je slaganje idealno. Najmanja količina značajnih cifara dobija se u okolini tačke 1. Naravno nema smisla govoriti o značajnim ciframa u vrednosti u samoj tački 1 jer u toj tački vrednost funkcije iznosi nula. Međutim, vidimo da je u okolini tačke 1 broj značajnih cifara u vrednosti funkcije znatno manji od broja značajnih cifara u vrednosti argumenta. Možemo reći da je uslovljenost izračunavanja funkcije  $\log$  u okolini tačke 1 slabo uslovljeno, imamo znatno manje značajnih cifara u vrednosti funkcije u odnosu na broj značajnih cifara argumenta funkcije. Primećujemo i da je izračunavanje funkcije  $\log$  dobro uslovljeno počev od vrednosti argumenta 2.5, takodje primećujemo da za vrednosti argumenta manje od .5 imamo veći broj značajnih cifara u vrednosti funkcije u odnosu na vrednost argumenta.



Slika 1: Grafik broja značajnih cifara u funkciji argumenta, eksperiment levo, teorijski rezultat i eksperiment desno.

2. Pretpostavimo da rešavamo sistem linearnih jednačina

$$Ax = b, \quad A = \begin{bmatrix} 1. & .1 & 0 & \dots & 0 \\ .1 & 1. & .1 & \dots & 0 \\ 0 & .1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

reda 40, gde je vektor  $b$  određen iz uslova  $b = Ax^*$ , gde je vektor  $x^*$  vektor sa svim koordinatama postavljenim na jedan. Pretpostavimo da elemente matrice  $A$  određujemo merenjem i da je rezultat merenja matrica  $B_i$ .

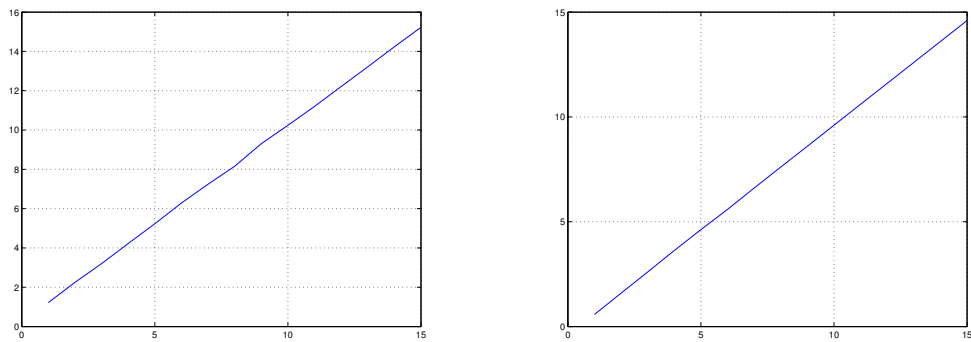
a) Za zadato  $i = 1, \dots, 15$  formirati matricu  $B_i$  koja ima elemente jednake nula gde i matrica  $A$ , dok su ostali elementi matrice  $B_i$  zadati sa barem  $i$  značajnih cifara u odnosu na elemente matrice  $A$ . Koristeći funkciju `linsolve` odrediti rešenje sistema linearnih jednačina  $B_i x_i = b$  i odrediti broj značajnih cifara kojim rešenje  $x_i$  aproksimira rešenje  $x^*$ . Nacrtati grafik zavisnosti broja značajnih cifara rešenja  $x_i$  u funkciji broja značajnih cifara elemenata matrice  $B_i$ , drugim rečima od  $i$ .

b) Dati teorijsku procenu minimalnog broja značajnih cifara kojim rešenje jednačine  $B_i x_i = b$  aproksimira  $x^*$  u funkciji broja značajnih cifara matrice  $B_i$ . Nacrtati grafik zavisnosti broja značajnih cifara rešenja  $x_i$  u funkciji broja značajnih cifara matrice  $B_i$ .

c) Uporediti rezultate dobijene pod a) i b) i diskutovati eventualna slaganja ili odstupanja.

**Rešenje.** Sve potrebne matrice možemo kreirati na sledeći način

```
n=40;
A=zeros(n);
A(1:(n+1):end)=1;
A(2:(n+1):end)=.1;
A((n+1):(n+1):end)=.1;
```



Slika 2: Slika desno predstavlja broj značajnih cifara u rešenju dobijen eksperimentom, slika desno predstavlja rezultate dobijene teorijski.

```
xZvezda=ones(n,1);
b=A*xZvezda;
```

a) Matricu  $B_i$  formiramo koristeći matricu  $A$  na sledeć i način

```
Bi=A.*(1+10^(-i)*(2*rand(n,n)-1));
```

Ovako izračunati nenulti elementi matrice  $B_i$  imaju vrednosti sa barem 5 značajnih cifara.

Script koji izračunava broj značajnih cifara rešenja u funkciji broja značajnih cifara elemenata matrice  $B_i$  može biti sledeći

```
n=40;
A=zeros(n);
A(1:(n+1):end)=1;
A(2:(n+1):end)=.1;
A((n+1):(n+1):end)=.1;
xZvezda=ones(n,1);
b=A*xZvezda;
z=zeros(15,1);
for i=1:15
    Bi=A.*(1+10^(-i)*(2*rand(n,n)-1));
    xi=linsolve(Bi,b);
    z(i)=-log10(norm(xi-xZvezda)/norm(xZvezda));
end
plot(1:15,z);
grid on;
```

Rezultat izvršenja **scripta** je prikazan na slici 2 levo. Grafik je skoro sasvim linearan.

b) Relativna greška rešenja sistema linearnih jednačina u funkciji relativne greške u vrednosti matrice i vrednosti slobodnog vektora iznosi

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{2k(A)}{1-r} \max \left\{ \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}, \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right\}.$$

Ova ocena je dobijena pod uslovom  $r = \|\Delta A\| \|A^{-1}\| < 1$ . Naravno,  $\Delta A = B_i - A$ . Primetimo da se vrednost slobodnog vektora ne menja i da je za sve sisteme linearnih jednačina, dakle za svako  $i$  ista, i reda je veličine mašinke preciznosti  $10^{-16}$ . Prethodno zapažanje daje nam mogućnost da zapišemo

$$\frac{\|x_i - x\|}{\|x\|} \leq \frac{2k(A)}{1-r} \frac{\|B_i - A\|}{\|A\|}, \quad z_x = -\log_{10} \frac{\|x_i - x\|}{\|x\|} \geq -\log_{10} \frac{2k(A)}{1-r} + z_{B_i}.$$

Sledeći script grafički prikazuje teorijsku ocenu

```
n=40;
A=zeros(n);
A(1:(n+1):end)=1;
A(2:(n+1):end)=.1;
A((n+1):(n+1):end)=.1;
invA=inv(A);
kA=norm(A)*norm(invA);
xZvezda=ones(n,1);
b=A*xZvezda;
z=zeros(15,1);
maxr=0;
for i=1:15
    Bi=A.*(1+10^(-i)*(2*rand(n,n)-1));
    zBi=-log10(norm(Bi-A)/norm(A));
    r=norm(Bi-A)*norm(invA);
    if maxr < r
        maxr=r;
    end
    z(i)=-log10(2*kA/(1-r))+zBi;
end
plot(1:15,z);
maxr
grid on;
```

Rezultat izvešenja **scripta** je prikazana na slici 2 desno. Maksimalna vrednost promenljive  $r$  iznosi približno .12.

c) Vidimo da su grafici približno isti, izuzev što je teorijska ocena malo konzervativnija.

### 3. Za određivanje vrednosti integrala

$$I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2},$$

koristićemo uopštenu formulu srednje tačke.

a) Napisati `script` file u `Matlabu` koji određuje aproksimaciju vrednosti integrala  $I$  sa 1, 2, 4, 8, 16, 32 i 64 podintervala. Nacrtati grafik zavisnosti broja značajnih cifara aproksimacije vrednosti integrala u funkciji  $\log_2 N$ , gde je  $N$  broj podintervala.

b) Odrediti teorijsku procenu vrednosti greške koja nastaje prilikom određivanja vrednosti integrala. Nacrtati teorijski procenjen najmanji broj značajnih cifara u funkciji  $\log_2 N$ , gde je  $N$  broj podintervala.

c) Vrednosti dobijene u delu zadatka pod a) smestiti u prvu kolonu matrice `r`, redom prema broju upotrebljenih podintervala počev od jednog podintervala ka 64 podintervala. Zatim odrediti elemente matrice `r`, na i ispod glavne dijagonale, na sledeći način

$$r(j,k)=r(j-1,k-1)+1/(4^{(k-1)}-1)*(r(j-1,k-1)-r(j-1,k-1)), \quad j=k, \dots, 7, \quad k=2, \dots, 7.$$

Elemente iznad glavne dijagonale matrice `r` na menjamo, jer nam nisu potrebni. Pod pretpostavkom da elementi matrice `r` na glavnoj dijagonali aproksimiraju vrednost integrala  $I$  nacrtati zavisnost broja značajnih cifara u funkciji  $\log_2 N$ , gde je  $N$  broj podintervala, dakle redni broj vrste matrice `r`. Na istom grafiku nacrtati grafik broja značajnih cifara dobijenih u delu zadatka pod a) i dobijen na opisani način. Koja je metoda bolja, s obzirom da i jedna i druga koriste iste podatke.

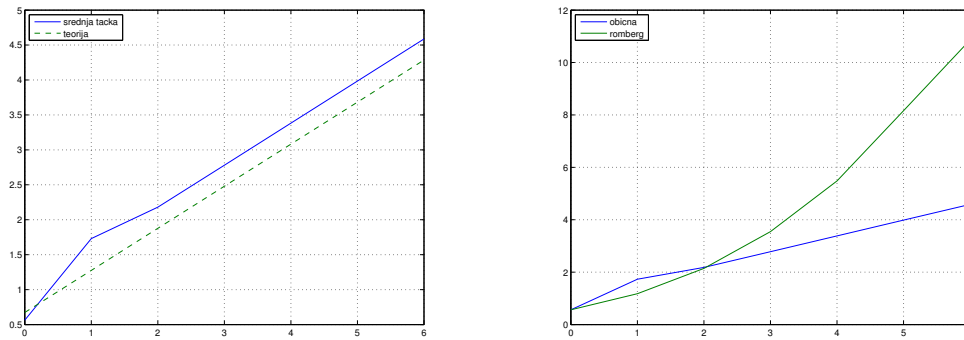
Metod integracije u delu pod c) se naziva Rombergova integracija.

**Rešenja.** Koristićemo funkcije `uopsteNewtonCotesOtvoren` i `newtonCotesOtvoren`.

a) `Script` koji generiše zahtevani grafik je

```
kstart=0;
kend=6;
r=zeros(kend-kstart+1);
f=@(x) (1/(1+x^2));
rez=pi/2;
for k=kstart:kend
    r(k+1,1)=uopstenNewtonCotesOtvoren(2^k,0,-1,1,f);
end
x=kstart:kend;
plot(x,-log10(abs(r(:,1)/rez-1)),x,log10(3*pi)-2+.6*k);
grid on;
```

Grafik je prikazan na slici 3 levo. Primetite da je uključeno i crtanje grafika i delu pod b).



Slika 3: Slika zavisnost broja značajnih cifara pri i integraciji formulom srednje tačke, Rombergova integracija u odnosu na prosto povećanje broja intervala.

b) Teorijska ocena greške je

$$|M_n(f) - I| \leq \frac{(b-a)^3}{24N^2} \max_{\psi \in [-1,1]} |f''(\psi)|.$$

Nalazimo

$$f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad f''(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}.$$

Treći izvod funkcije je

$$f'''(x) = -\frac{24x(x^2-1)}{(1+x^2)^4},$$

pa je lokalni maksimum u tačkama  $\pm 1$  ili 0. Nalazimo  $f(-1) = 1/2$ ,  $f(1) = 1/2$  i  $f(0) = 1$ . Izraz za grešku postaje

$$|M_{2^k}(f) - I| \leq \frac{1}{3 \cdot 2^{2k}}, \quad k = 0, \dots, 6.$$

Odavde možemo odrediti izraz za značajne cifre u funkciji  $k$ , nalazimo

$$z_k = \log_{10} \frac{3\pi}{2} + .6 k.$$

c) Script koji ilustruje pomenutu metodu integracije može biti

```
kstart=0;
kend=6;
r=zeros(kend-kstart+1);
f=@(x) (1/(1+x^2));
rez=pi/2;
for k=kstart:kend
    r(k+1,1)=uopstenNewtonCotesOtvoren(2^k,0,-1,1,f);
end
for k=(kstart+2):(kend+1)
```

```

    for j=k:(kend+1)
        r(j,k)=r(j,k-1)+1/(4^(k-1)-1)*(r(j,k-1)-r(j-1,k-1));
    end
end
plot(kstart:kend,-log10(abs(r(:,1)/rez-1)), ...
     kstart:kend,-log10(abs(r(1:(kend-kstart+1+1):end)/rez-1)));
legend('obicna','romberg','Location','northwest');
grid on;

```

Primetićete da je Rombergova integracija superiornija. U stvari Rombergova integracija se sastoji samo u ideji modifikacije niza vrednosti  $M_{2^k N_0}$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ . Primetimo da ne izvršavamo nikakva nova izračunavanja podintegralne funkcije, naprotiv samo modifikujemo niz već izračunatih vrednosti  $M_{2^k}$ . Ideja se može primeniti i za druge uopštene kvadrature formule u nešto izmenjenom obliku.

#### 4. Pretpostavimo da rešavamo Cauchyev problem

$$y' = -5y, \quad y(0) = 1.$$

a) Rešiti egzaktno Cauchyev problem.

b) Napisati funkciju u `Matlabu` koja rešava Cauchyev problem koristeći Adams-Bashfortovu metodu

$$y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{h}{2}(3f_{n+1} - f_n).$$

Potrebnu startnu vrednost  $y_1$  izračunati koristeći egzaktno rešenje dobijeno u delu pod a). Rešiti Cauchyev problem, sa  $h = .001$  i nacrtati broj značajnih cifara u funkciji argumenta funkcije  $y$  na intervalu  $[0, 2]$ . Objasniti oblik krive.

c) Za  $h_i = 2^{-i}$ ,  $i = 0, \dots, 5$ , nacrtati broj značajnih cifara u funkciji argumenta funkcije  $y$ . Na osnovu slike odrediti koje vrednosti koraka  $h_i$  imaju veliki gubitak značajnih cifara sa porastom  $x$ , a za koje vrednosti koraka  $h_i$  je taj gubitak znatno manji. Objasniti pojavu pojmom stabilnosti metoda.

**Rešenje.** a) Rešenje je

$$y = e^{-5x}.$$

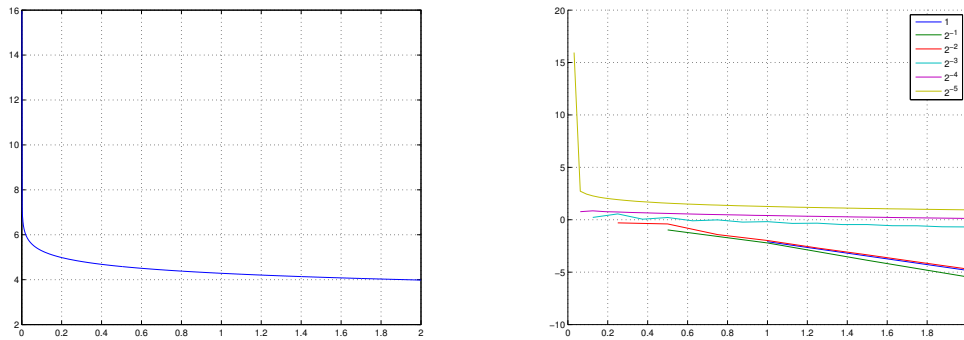
Može se dobiti jednostavno jer jednačina razdvaja promenljive.

b) Funkcija može biti napisana na razne načine jedan od njih je i ovaj

```

function [x,y]=ab(x0,y0,b,h,f)
    numOfSteps=(b-x0)/h;
    x=zeros(numOfSteps+1,1);
    y=zeros(numOfSteps+1,1);
    x(1:2,1)=[x0; x0+h];

```



Slika 4: Slika levo ilustruje gubitak značajnih cifara sa povećanjem rastojanja od početnog uslova, slika desno ilustruje stabilnost metoda.

```

y(1:2,1)=y0;
for i=2:numOfSteps
    x(i+1)=x(i)+h;
    y(i+1)=y(i)+h/2*(3*f(x(i),y(i))-f(x(i-1),y(i-1)));
end
end

```

Script koji crta zahtevani grafik može biti sledeći

```

f=@(x,y)(-5*y);
x0=0;
b=2;
h=.001;
y0=[1; exp(-5*h)];
[x,y]=ab(x0,y0,b,h,f);
plot(x,-log10(abs(y.*exp(5*x)-1)));
grid on;

```

Grafik je prikazan na slici 4 levo.

Metod je drugog reda. Oblik krive možemo objasniti korseći ocenu greške. Znamo da važi

$$\frac{|y_n - y(x_n)|}{|y(x_n)|} \approx Ch^2(x_n - x_0), \quad r_n \approx Ch^2(x_n - x_0), \quad z_n \geq 9 - \log_{10} n - \log_{10} C.$$

Odavde možemo zaključiti da su prva dva člana od značaja i doprinose logaritamskom obliku krive.

c) Script koji crta grafik koji nam je potreban može biti sledeći

```

y0=[1 exp(-5*h)];

```



```

x0=0;
b=2;
f=@(x,y)(-5*y);
istart=0;
iend=0;
figure;
hold all;
for i=0:5
    h=2^(-i);
    [x,y]=ab(x0,y0,b,h,f);
    plot(x,-log10(abs(y.*exp(5*x)-1)));
end
grid on;
legend('1','2^{-1}','2^{-2}','2^{-3}','2^{-4}','2^{-5}','Location','northeast');
hold off;

```

Interval stabilnosti metoda je  $[-1, 0]$ . Zaključujemo da je prva vrednost za  $h$  koja zadovoljava uslov apsolutne stabilnosti izražena sa  $-5h > -1$ , ili  $h < 1/5$ . U našem slučaju to su vrednosti  $h = 2^{-4}$  i  $h = 2^{-5}$ . Ako su vrednosti  $h < 1/5$  naše rešenje ima osobinu apsolutne stabilnosti i prati po smislu stvarno rešenje diferencijalne jednačine. Međutim, ako su vrednosti  $h > 1/5$  naše rešenje nije ni približno isto kao rešenje diferencijalne jednačine. U poslednjem slučaju kažemo da smo u regionu nestabilnosti.