Математика 3

Душан Ђукић

1. Опште диференцијалне једначине

У општем случају, диференцијална једначина реда n је једначина облика

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

где је F нека функција по промењивој x, непознатој функцији y и њеним изводима $y', \dots, y^{(n)}$.

Опште решење диференцијалне једначине обично зависи од n *слободних константи* $C_1, C_2, \dots, C_n$. Можемо га добити у неком од следећих облика:

- експлицитни облик: $y = f(x; C_1, \dots, C_n)$;
- имплицитни облик: $f(x, y; C_1, \dots, C_n) = 0$;
- параметарски облик: $x = g(t; C_1, \dots, C_n)$, $y = h(t; C_1, \dots, C_n)$.

Најзад, понекад постоје и решења која се не уклапају у опште ни за који избор слободних константи $C_1, \dots, C_n$ (чак ни бесконачних). Та решења зовемо *сингуларним* и обично се појаве онда када у процесу решавања једначине делимо нечим што може бити нула. Испитивање сингуларних решења је ван програма овог курса.

Пример 1. Опште решење једначине $y'^2 = y$ је $y = \frac{1}{4}(x + C)^2$.

Заиста, имамо $dy/dx = y' = \pm\sqrt{y}$ и одатле $dx = \pm dy/\sqrt{y}$, што интеграцијом даје $x + C = \pm 2\sqrt{y}$.

Међутим, функција $y = 0$ је такође решење, а не добија се ни за један избор константе C. То је сингуларно решење.

Једначине у којима не учествује y или x

У овим случајевима одговарајућим сменама снижавамо ред дате једначине (1) за 1.

- **Случај 1.** Претпоставимо да у (1) не учествује функција y, мада учествују изводи $y', \dots, y^{(n)}$.

Тада смена $z(x) = y'(x)$ своди једначину на нову једначину реда $n - 1$.

Пример 2. Решити једначину $y' = xy''$.

Решење. Сменом $z = y'$ добијамо $z = xz' = xdz/dx$, што је једначина са раздвојеним промењивим: $dz/z = dx/x$. Интеграција даје $\ln|z| = \ln|x| + C$, тј. $|z/x| = e^C$, одакле је $y' = z = C_0 x$ за неку константу C_0. Још једна интеграција даје коначно $y = \int y'dx = C_1x^2 + C_2$, где су $C_1 (= \frac{1}{2}C_0)$ и C_2 произвољне константе.

Пример 3. Решити једначину $y'^3 - y' = x$.

Решење. Ово је пример једначине која се решава параметарски. Означимо $y' = t$, тако да је $t^3 - t = x$. Тада је $dx = (3t^2 + 1)dt$, па имамо $y = \int y'dx = \int t(3t^2 + 1)dt = \frac{3}{4}t^4 + \frac{1}{2}t^2 + C$. Добили смо решење у параметарском облику: $(x, y) = (t^3 - t, \frac{3}{4}t^4 + \frac{1}{2}t^2 + C)$.

- **Случај 2.** Претпоставимо да у (1) не учествује промењива x, мада учествују функција y и њени изводи по x: $y', \dots, y^{(n)}$.

У овом случају настојимо да се отарасимо променљиве x. Ње нема у једначини, али се појављује њен диференцијал dx. Наиме, $y' = dy/dx$, $y'' = d(\frac{dy}{dx})/dx$ итд.

Зато ћемо y прогласити за нову променљиву, а y' за непознату функцију по y: $y' = z(y)$. Како је $dx = dy/z$, изводи функције y по x вишег реда могу се изразити преко y, z и извода $z', z'', \ldots$ по y. Заиста,

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = z \cdot \frac{dz}{dy} = zz', \quad y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d(zz')}{dx} = z \cdot \frac{d(zz')}{dy} = z \cdot (zz')' = z(zz'' + z'^2), \quad \text{итд.}$$

Пример 4. Решити једначину $y'' = y'(1 - 2y)$.

Решење. Сменом $y' = z(y)$ дата једначина постаје $zz' = z(1 - 2y)$, што је једначина са раздвојеним променљивим: $dz = (1-2y)dy$. Интеграција даје $y' = z = y - y^2 + C$, тј. $dx = \frac{dy}{y - y^2 + C}$. Поновном интеграцијом добијамо $x = \int \frac{dy}{y-y^2+C} = -\frac{1}{C_1} \operatorname{arctg} \frac{2y-1}{2C_1} + C'$, где је $C_1 = \sqrt{-C - \frac{1}{4}}$.

Коначно, $y = \frac{1}{2} - C_1 \operatorname{tg}(C_1 x + C_2)$, где је $C_2 = C_1 C'$.

Формирање једначине на основу општег решења

...Дато је решење, наћи задатак...

Нека је дата фамилија функција $y = f(x; C_1, \ldots, C_n)$ са n слободних константи $C_1, \ldots, C_n$. Очекујемо да диференцијална једначина која описује ову фамилију (тј. чије је она опште решење) има степен n. Зато налазимо првих n извода. Из њих можемо изразити константе C_i преко y и њених извода, на основу чега ћемо добити одговарајућу диференцијалну једначину.

Пример 5. Наћи диференцијалну једначину чије је опште решење $y = C_1(x + 1) + C_2\sqrt{x}$.

Решење. Тражена једначина имаће ред 2.

Налазимо $y' = C_1 + \frac{C_2}{2\sqrt{x}}$ и $y'' = -\frac{C_2}{4x\sqrt{x}}$. Из последње једнакости је $C_2 = -4y''x\sqrt{x}$, а затим из претпоследње $C_1 = y' + 2y''x$. Заменом у полазну једначину добијамо $y = (x+1)(y'+2y''x) - 4y''x$, тј. $2(x^2 - x)y'' + (x + 1)y' - y = 0$.

Задаци

1. Наћи диференцијалну једначину чије је опште решење $y = \frac{x+C_1}{x+C_2}$.

Решење. Тражена једначина имаће ред 2, па зато налазимо $y' = -\frac{C_1-C_2}{(x+C_2)^2}$ и $y'' = \frac{2(C_1-C_2)}{(x+C_2)^3}$. Дељењем ове две једнакости елиминишемо C_2: $x + C_2 = -\frac{2y'}{y''}$. Одатле је $C_1 - C_2 = -(x + C_2)^2 y' = -\frac{4y'^3}{y''^2}$.

Сада убацивање у прву једнакост даје $y = 1 + \frac{C_1-C_2}{x+C_2} = 1 + \frac{2y'^2}{y''}$, тј. $(y - 1)y'' = 2y'^2$.

2. Решити диференцијалну једначину $y''e^y + y' = 0$.

Решење. Сменом $y' = z(y)$ и $y'' = z(y)z'(y)$ добијамо $zz'e^y + z = 0$, тј. $z'(y) = -e^{-y}$. Следи $z = \int z'dy = e^{-y} + C_1$, тј. $dy/dx = y' = e^{-y} + C_1$, што је једначина са раздвојеним променљивим: $dx = dy/(e^{-y}+C_1)$. Интеграција даје $x = \frac{1}{C_1}\ln(1+C_1e^y)+C$, што се може еквивалентно записати као $y = \ln\frac{e^{C_1x+C_2}-1}{C_1}$, где је $C_2 = -CC_1$.

3. Решити диференцијалну једначину $y''+y'^2+2xy'^3 = e^{2y}y'^3$ уз почетне услове $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$. Није забрањено користити смену $x = x(y)$.

Решење. Напишимо дату једначину као једначину по $x = x(y)$: како је $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{x'}$ и $y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d(1/x')}{dx} = \frac{d(1/x')}{dy} \cdot (\frac{dx}{dy})^{-1} = -\frac{x''}{x'^2} \cdot \frac{1}{x'} = -\frac{x''}{x'^3}$, дата једначина постаје $-\frac{x''}{x'^3} + \frac{1}{x'^2} + \frac{2x}{x'^3} = \frac{e^{2y}}{x'^3}$, тј. $x''-x'-2x = -e^{2y}$. Хомогено решење ове једначине је $x_h(y) = C_1e^{2y}+C_2e^{-y}$, а партикуларно има облик $x_p(y) = Aye^{2y}$. Лако налазимо $A = -\frac{1}{3}$, те је $x = x_p + x_h = (-\frac{1}{3}y + C_1)e^{2y} + C_2e^{-y}$.

Најзад, за $x = 0$ важи $y = 0$, $y' = \frac{1}{x'} = 1$, одакле добијамо $x(0) = C_1 + C_2 = 0$ и $x'(0) = 2C_1 - \frac{1}{3} + C_2 = 1$. Следи $C_1 = \frac{4}{3}$ и $C_2 = -\frac{4}{3}$, дакле $x = \frac{4-y}{3}e^{2y} - \frac{4}{3}e^{-y}$.

2. Линеарне диференцијалне једначине

Линеарне диференцијалне једначине су једначине облика

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x), \tag{2}$$

где су коефицијенти $a_1, \ldots, a_n$ и b функције по x. Она је *хомогена* ако је $b(x) \equiv 0$, тј.

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0. \tag{3}$$

Приметимо да је функционал L линеаран, тј. $L(C_1y_1 + \cdots + C_ky_k) = C_1L(y_1) + \cdots + C_kL(y_k)$. Према томе, ако су функције $y_1, \ldots, y_k$ решење хомогене једначине (3), онда је то и функција $y = C_1y_1 + \cdots + C_ky_k$, за ма које константе $C_1, \ldots, C_k$.

Ако је y_p једно решење нехомогене једначине (2), онда је $L(y - y_p) = L(y) - L(y_p) = b(x) - b(x) = 0$. Другим речима, $y - y_p$ је решење одговарајуће хомогене једначине (3).

- Опште решење једначине (3) реда n има облик

  $$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n,$$

  где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ представљају n линеарно независних решења. За ових n решења кажемо да чине *фундаментални систем решења.*

- Опште решење једначине (2) има облик

  $$y = y_p + y_h, \tag{4}$$

  где је y_p једно (тзв. *партикуларно*) решење те једначине, а $y = y_h = C_1y_1 + \cdots + C_ny_n$ *опште хомогено* решење - тј. опште решење одговарајуће хомогене једначине (3)

Константе $C_1, \ldots, C_n$ су произвољне. Оне се могу одредити почетним (или *Кошијевим*) условима, тј. када су задате вредности функције и/или њених извода у неким тачкама.

Шта беше линеарна независност?

- ◦ Функције $y_1, \ldots, y_n$ су линеарно независне ако не постоје константе $C_1, \ldots, C_n$ које нису све нула такве да је $y = C_1y_1 + \cdots + C_ny_n = 0$.

За дате $n-1$ пута диференцијабилне функције $y_1, y_2, \ldots, y_n$, детерминанта Вронског је

$$W(y_1, \ldots, y_n) = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix}.$$

- Функције $y_1, \ldots, y_n$ су линеарно независне ако њихова детерминанта Вронског $W(y_1, \ldots, y_n)$ није константно нула.

Пример 6. Решити диференцијалну једначину $y'' - 3y' + 2y = 1$.

Решење. Одмах видимо да је једно партикуларно решење $y_p = \frac{1}{2}$.

Хомогена решења потражићемо у облику $y = e^{\lambda x}$. Тада је $y' = \lambda e^{\lambda x}$ и $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$, те је $y'' - 3y' + 2y = (\lambda^2 - 3\lambda + 2)e^{\lambda x}$, што је нула ако и само ако је $\lambda = 1$ или $\lambda = 2$. Дакле, $y_1 = e^x$ и $y_2 = 2x$ су хомогена решења.

Уверимо се да су ова два хомогена решења линеарно независна: њихова детерминанта Вронског је $W = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{bmatrix} = e^{3x} \not\equiv 0$. Дакле, $y_h = C_1e^x + C_2e^{2x}$.

Према томе, опште решење дате једначине је $y = y_p + y_h = 1 + C_1e^x + C_2e^{2x}$.

Линеарна једначина са једним познатим решењем

Опште решење хомогене једначине (3) одређено је са n линеарно независних решења. Претпоставимо да нам је познато само једно решење, нпр. y_1. Увођењем смене $y = y_1 z$ дата једначина се своди на једначину по новој функцији z, реда мањег за 1.

Пример 7. Решити једначину $y'' - 2y' + y = 0$.

Решење. Као у претходном примеру, потражимо решење у облику $y = e^{\lambda x}$. Добићемо $y'' - 2y' + y = (\lambda^2 - 2\lambda + 1)e^{\lambda x}$, што је нула само за $\lambda = 1$. Дакле, једно решење је $y_1 = e^x$, а које је друго?

Уводимо смену $y = e^x z$. Како је $y' = e^x(z'+z)$ и $y'' = e^x(z''+2z'+z)$, имамо $0 = y''-2y'+y = e^x z''$, одакле је $z'' = 0$. Следи да је $z = C_1 + C_2 x$ и, коначно, $y = (C_1 + C_2 x)e^x$, што је опште решење дате једначине.

(Могућ одговор на питање "а које је друго?" био би $y_2 = xe^x$.)

Претпоставимо да имамо општу хомогену линеарну једначину другог реда

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

чије нам је једно решење y_1 познато. Заменом $y = y_1 z$, $y' = y_1 z' + y_1' z$ и $y'' = y_1 z'' + 2y_1' z' + y_1'' z$ добијамо

$$\begin{aligned} 0 &= y_1 z'' + 2y_1' z' + y_1'' z + p(x)(y_1 z' + y_1' z) + q(x) y_1 z \\ &= y_1 z'' + (2y_1' + p(x)y_1)z' + (y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1)z = y_1 z'' + (2y_1' + p(x)y_1)z' \end{aligned}$$

(приметимо да је $y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0$ јер је y_1 решење), што је једначина првог реда по функцији $u = z'$. Њено решење је $u = C_2 e^{-\int p\,dx}/y_1^2$, одакле налазимо $z = \int u dx$. Добијамо опште решење у облику

$$y = y_1 \left(C_1 + C_2 \int \frac{e^{-\int p\,dx}}{y_1^2} dx \right).$$

Ово је специјалан случај *Лиувилове формуле.*

Хомогена линеарна једначина са константним коефицијентима

Дата је диференцијална једначина

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0. \tag{5}$$

Испитајмо за које λ је функција $y = e^{\lambda x}$ решење ове једначине. Како је $y^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda x}$, имамо $L(y) = P(\lambda)e^{\lambda x}$, где је

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n \tag{6}$$

карактеристични полином једначине (5). Дакле, $y = e^{\lambda x}$ је решење ове једначине ако и само ако је λ нула полинома (6).

Шта више, ако је λ нула полинома (6) са вишеструкошћу r (тј. $(x-\lambda)^r$ дели полином $P(x)$), онда су

$$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ x^2 e^{\lambda x},\ \ldots,\ x^{r-1} e^{\lambda x}$$

решења једначине (5).

Ово остаје на снази и ако су $\lambda = a \pm bi$ комплексни корени карактеристичног полинома (они увек долазе у пару). Међутим, у том случају је

$$y = e^{\lambda x} = e^{ax}(\cos bx \pm i \sin bx)$$

комплексно решење једначине (5), па зато уместо њих често узимамо

$$y_1 = \operatorname{Re} y = e^{ax}\cos bx \quad \text{и} \quad y_1 = \pm \operatorname{Im} y = e^{ax}\sin bx$$

као реална решења.

Пример 8. Решити једначине:

(а) $y''' - 7y' + 6y = 0$,
(б) $y^{(4)} - y'' - 2y' + 2y = 0$,
(в) $y^{(7)} + 2y^{(5)} + y''' = 0$.

Решење. (а) Карактеристични полином је $P(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda + 6 = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+3)$. Дакле, фундаментални систем решења чине функције $y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^x$, $y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{2x}$ и $y_3 = e^{\lambda_3 x} = e^{-3x}$, а опште решење је $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-3x}$.

(б) Карактеристични полином је $P(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^2 - 2\lambda + 2 = (\lambda - 1)^2(\lambda^2 + 2\lambda + 2)$, а његове нуле су $\lambda = -1 \pm i$ и двострука $\lambda = 1$.

- Двострукој нули $\lambda = 1$ одговарају решења $e^{\lambda x}$ и $xe^{\lambda x}$, тј. e^x и xe^x.
- Пару комплексних нула $\lambda = -1 \pm i$ (што је $a \pm bi$ за $a = -1$ и $b = 1$) одговарају решења $e^{-x}\cos x$ и $e^{-x}\sin x$.

Опште решење је $y = (C_1 + C_2 x)e^x + e^{-x}(C_3 \cos x + C_4 \sin x)$.

(в) Карактеристични полином је $P(\lambda) = \lambda^7 - 2\lambda^5 + \lambda^3 = \lambda^3(\lambda^2 + 1)^2$, а његове нуле су $\lambda = 0$ са вишеструкошћу 3 и $\lambda = \pm i$ са вишеструкостима 2.

- Трострукој нули $\lambda = 0$ одговарају решења $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, x^2 e^{\lambda x}$, тј. $1, x, x^2$.
- Двоструким комплексним нулама $\lambda = \pm i$ (што је $a \pm bi$ за $a = 0$ и $b = 1$) одговарају решења $\cos x$, $x\cos x$, $\sin x$, $x \sin x$.

Опште решење је $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + (C_4 + C_5 x)\cos x + (C_6 + C_7 x)\sin x$.

Метод неодређених коефицијената

Претпоставимо да нам је дата нехомогена линеарна једначина са константим коефицијентима

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = b(x). \tag{7}$$

С обзиром на (4), успешно решавање овакве решење захтева налажење општег хомогеног решења, које сада умемо да нађемо, као и једног партикуларног решења. У неким специјалним случајевима облик партикуларног решења се може погодити. Један такав случај је када је $b(x)$ збир неколико функција облика $x^k e^{ax}\cos bx$ или $x^k e^{ax}\sin bx$.

- Нека је у једначини (7) функција $b(x)$ облика

$$e^{\alpha x}(P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x),$$

где су P_1 и P_2 полиноми степена не већег од k. Тада се партикуларно решење једначине може наћи у облику

$$y = x^s e^{\alpha x}(Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x),$$

где су Q_1 и Q_2 такође полиноми степена не већег од k, а s је вишеструкост корена $\alpha + \beta i$ у карактеристичном полиному једначине.

Пример 9. Решити једначине:

(а) $y'' - 4y' + 3y = (x-1)e^{2x}$,
(б) $y'' + y = \cos x$,
(в) $y''' - 3y' + 2y = e^x + e^{-2x} + e^{3x}$.

Решење. (а) Карактеристични полином је $T(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$, па је хомогено решење једначине $y_h = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$.

С друге стране, $\alpha = 2$, $\beta = 0$ и $P_1(x) = x - 1$ (нема полинома P_2), одакле је $k = \deg P_1 = 1$. Најзад, $\alpha + \beta i$ није нула карактеристичног полинома (тј. то „је“ нула вишеструкости 0), те је $s = 0$. Према томе, партикуларно решење тражимо у облику $y_p = x^0 e^{2x}(Q_1(x)\cos 0x + Q_2(x)\sin 0x) = Q_1(x)e^{2x}$, где је $Q_1(x) = A + Bx$ полином степена највише $k = 1$.

Остаје да одредимо A и B. Како је $y_p = (Bx+A)e^{2x}$, $y_p' = (2Bx+2A+B)e^{2x}$ и $y_p'' = 4(Bx+A+B)e^{2x}$, имамо $(x-1)e^{2x} = y_p'' - 4y_p' + 3y_p = (-Bx - A)e^{2x}$, одакле је $B = -1$, $A = 1$ и $y_p = (1-x)e^{2x}$.

Опште решење је $y = y_p + y_h = (1-x)e^{2x} + C_1 e^x + C_2 e^{3x}$.

(б) Карактеристични полином је $T(x) = x^2 + 1 = (x+i)(x-i)$, а хомогено решење $y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

У овом случају је $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $P_1(x) = 1$ и $P_2(x) = 0$, те је $k = 0$, што значи да су $Q_1(x) = A$ и $Q_2(x) = B$ константе. Како је $\alpha + \beta i = i$ једнострука нула полинома $T(x)$, имамо $s = 1$. Зато партикуларно решење тражимо у облику $y_p = x(A\cos x + B \sin x)$.

Најзад, $\cos x = y_p'' + y_p = 2B\cos x - 2A \sin x$, одакле је $B = \frac{1}{2}$ и $A = 0$, тј. $y_p = \frac{1}{2} x \sin x$.

Опште решење је $y = y_p + y_h = C_1 \cos x + (\frac{1}{2}x + C_2)\sin x$.

(в) Хомогено решење је $y_h = (C_1 + C_2 x)e^x + C_3 e^{-2x}$.

У овом случају y_p је збир три партикуларна решења:

- y_{p_1} - партикуларно решење једначине $y''' - 3y' + 2y = e^x$,
- y_{p_2} - партикуларно решење једначине $y''' - 3y' + 2y = e^{-2x}$,
- y_{p_3} - партикуларно решење једначине $y''' - 3y' + 2y = e^{3x}$.

Даље поступамо на већ описан начин. Ова три партикуларна решења имају облике $y_{p_1} = Ax^2e^x$, $y_{p_2} = Bxe^{-2x}$ и $y_{p_3} = Ce^{3x}$. Налазимо $A = \frac{1}{6}$, $B = \frac{1}{9}$ и $C = \frac{1}{20}$.

Опште решење је $y = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3} + y_h = \frac{1}{6}x^2e^x + \frac{1}{9}xe^{-2x} + \frac{1}{20}e^{3x}$.

Метод варијације константе

Овај метод је јачи од метода неодређених коефицијената, јер не захтева специјалан облик десне стране у (7). Шта више, он може да се користи и ако коефицијенти $a_1, \ldots, a_n$ нису константни - под условом да смо у стању да нађемо опште хомогено решење. С друге стране, рачун је често пипавији.

Претпоставимо да нам је познато опште хомогено решење $y_h = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n$ једначине (7). И партикуларно решење y_p може да се запише у оваквом облику, али $C_1, \ldots, C_n$ неће бити константе:

$$y_p = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \cdots + C_n(x)y_n. \tag{8}$$

Сада су $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *непознате функције* - дакле, уместо једне непознате функције имамо их n. С друге стране, за ових n функција имамо $n-1$ степени слободе. Дакле, како је $y_p' = C_1y_1' + C_2y_2' + \cdots + C_ny_n' + C_1'y_1 + C_2'y_2 + \cdots + C_n'y_n$, имамо право да наметнемо услов

$$C_1'y_1 + C_2'y_2 + \cdots + C_n'y_n = 0.$$

Под овим условом је $y_p' = C_1y_1' + C_2y_2' + \cdots + C_ny_n'$ и $y_p'' = C_1y_1'' + C_2y_2'' + \cdots + C_ny_n'' + C_1'y_1' + C_2'y_2' + \cdots + C_n'y_n'$. Намећемо нови услов

$$C_1'y_1' + C_2'y_2' + \cdots + C_n'y_n' = 0.$$

Сада је $y_p'' = C_1y_1'' + C_2y_2'' + \cdots + C_ny_n''$, итд. Понављајући поступак $n-1$ пут, наметнућемо услов

$$C_1'y_1^{(n-2)} + C_2'y_2^{(n-2)} + \cdots + C_n'y_n^{(n-2)} = 0,$$

чиме ћемо добити $y_p^{(n-1)} = C_1y_1^{(n-1)} + C_2y_2^{(n-1)} + \cdots + C_ny_n^{(n-1)}$ и $y_p^{(n)} = C_1y_1^{(n)} + C_2y_2^{(n)} + \cdots + C_ny_n^{(n)} + [C_1'y_1^{(n-1)} + C_2'y_2^{(n-1)} + \cdots + C_n'y_n^{(n-1)}]$. Најзад,

$$b(x) = L(y) = C_1'y_1^{(n-1)} + C_2'y_2^{(n-1)} + \cdots + C_n'y_n^{(n-1)}.$$

Према томе:

- Функције $C_1, C_2, \ldots, C_n$ у (8) могу се одредити решавањем система једначина:

$$\begin{cases} C_1'y_1 & +C_2'y_2 & + \cdots + C_n'y_n & = & 0, \\ C_1'y_1' & +C_2'y_2' & + \cdots + C_n'y_n' & = & 0, \\ \cdots\cdots\cdots & & & & \\ C_1'y_1^{(n-2)} & +C_2'y_2^{(n-2)} & + \cdots + C_n'y_n^{(n-2)} & = & 0, \\ C_1'y_1^{(n-1)} & +C_2'y_2^{(n-1)} & + \cdots + C_n'y_n^{(n-1)} & = & b(x). \end{cases}$$

Пример 10. Решити једначину $y'' + y = \operatorname{tg} x$.

Решење. Опште хомогено решење је $y_h = C_1\cos x + C_2\sin x$. Зато решење дате једначине тражимо у облику $y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$. Функције C_1 и C_2 налазимо решавањем система по C_1' и C_2':

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0, \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \operatorname{tg} x. \end{cases}$$

Добијамо $C_1'(x) = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}$ и $C_2'(x) = \sin x$. Интеграцијом следи $C_1(x) = \sin x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right| + A$ и $C_2(x) = -\cos x + B$, где су A и B произвољне константе.

Према томе, $y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right|\cos x + A\cos x + B\sin x$, што је опште решење дате једначине.

Ојлерова једначина

То је једначина облика

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = b(x),$$

где су $a_1, \ldots, a_n$ константе. Сменом $x = e^t$ и $y(x) = y(e^t) = z(t)$ ова једначина се своди на линеарну са константним коефицијентима. Наиме, важи $dx = e^t dt$, те је

$$y' = \frac{dy}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt} = e^{-t}z', \quad y'' = \frac{d(y')}{dx} = e^{-t}\frac{d(y')}{dt} = e^{-2t}(z'' - z'), \quad \text{итд},$$

где $z', z'', \ldots$ представљају изводе по новој промењивој t. Тако добијамо

$$y = z, \quad xy' = z', \quad x^2y'' = z'' - z', \quad x^3y''' = z''' - 3z'' + 2z', \quad \ldots, \tag{9}$$

и уопште, $x^n y^{(n)} = P_n(\frac{d}{dt})z$, где је $P_n(\xi) = \xi(\xi-1)(\xi-2)\cdots(\xi-n+1)$.

Пример 11. Решити једначине:

(а) $x^2y'' + xy' + y = 0$,
(б) $(2x+1)^2y'' + y = \sqrt{4x+2}$.

Решење. (а) Сменом $x = e^t$ и $y(x) = y(e^t) = z(t)$ сводимо једначину на $(z''-z')+z'+z = 0$, тј. $z''+z = 0$. Њено опште решење је $z = C_1\cos t + C_2\sin t$, али $t = \ln x$, дакле $y = C_1\cos\ln x + C_2\sin\ln x$.

(б) Дату једначину записујемо у облику $4(x+\frac{1}{2})^2y'' + y = 2\sqrt{x+\frac{1}{2}}$. У овом случају користимо смену $x + \frac{1}{2} = e^t$ и $y(x) = z(t)$. Формуле (9) сада гласе $(x+\frac{1}{2})y' = z'$ и $(x+\frac{1}{2})^2y'' = z'' - z'$. Једначина постаје $4z'' - 4z' + z = 2e^{t/2}$.

Опште решење последње једначине је $z = (\frac{1}{4}t^2 + C_1t + C_2)e^{t/2}$, што с обзиром на $t = \ln(x+\frac{1}{2})$ најзад даје $y = \left(\frac{1}{4}\ln^2(x+\frac{1}{2}) + C_1\ln(x+\frac{1}{2}) + C_2\right)\sqrt{x+\frac{1}{2}}$.

Задаци

1. Решити диференцијалну једначину $y'' + y' - 6y = e^x$, а затим наћи оно решење које задовољава услове $y(0) = y'(0) = 1$.

Решење. Карактеристични полином је $T(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda-2)(\lambda-3)$, па је хомогено решење дате једначине $y_h = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$.

Партикуларно решење тражимо једноставно као $y_p = Ae^x$ и налазимо $A = -\frac{1}{4}$, тако да је опште решење $y = y_p + y_h = -\frac{1}{4}e^x + C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$.

Почетни услови дају $y(0) = -\frac{1}{4} + C_1 + C_2 = 1$ и $y'(0) = -\frac{1}{4}e^x + 2C_1 + 3C_2 = 1$, одакле лако налазимо $C_1 = \frac{5}{2}$ и $C_2 = -\frac{5}{4}$. Тражено решење је $y = -\frac{1}{4}e^x + \frac{5}{2}e^{2x} - \frac{5}{4}e^{3x}$.

2. Наћи решење диференцијалне једначине $2y'' - 3y' + y = e^{x-1}$ које задовољава услове $y(1) = y'(1) = 1$.

Решење. Карактеристични полином је $T(\lambda) = 2\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 2(\lambda-1)(\lambda-\frac{1}{2})$, па је хомогено решење дате једначине $y = C_1e^x + C_2e^{x/2}$.

Десна страна дате једначине је $\frac{1}{e}e^x$, па партикуларно решење тражимо у облику $y_p = Axe^x$. Убацивањем $y' = A(x+1)e^x$ и $y'' = A(x+2)e^x$ добијамо $A = \frac{1}{e}$, тј. $y_p = \frac{x}{e}e^x$. Дакле, опште решење је $y = y_p + y_h = (\frac{x}{e} + C_1)e^x + C_2e^{x/2}$.

Сада из почетних услова имамо $y(1) = (1 + C_1e) + C_2e^{1/2} = 1$ и $y'(1) = (2 + C_1e) + \frac{1}{2}C_2e^{1/2} = 1$, одакле добијамо $C_1 = -\frac{2}{e}$ и $C_2 = \frac{2}{\sqrt{e}}$.

Према томе, коначно решење је $y = (x-2)e^{x-1} + 2e^{\frac{x-1}{2}}$.

3. Наћи оно решење диференцијалне једначине $y''+9y = \sin x \sin 2x$ које задовољава услове $y(0) = 1$ и $y'(0) = 0$.

Решење. Карактеристични полином дате једначине је $T(\lambda) = \lambda^2 + 9$ са нулама $\pm 3i$, па је хомогено решење $y_h = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$. Како је десна страна једначине $\sin x \sin 2x = \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\cos 3x$, партикуларно решење делимо на два дела: y_{p_1} за једначину $y'' + 9y = \frac{1}{2}\cos x$ и y_{p_2} за једначину $y'' + 9y = -\frac{1}{2}\cos 3x$.

Решење y_{p_1} тражимо у облику $y_{p_1} = A_1 \cos x + A_2 \sin x$ и налазимо $A_1 = \frac{1}{16}$ и $A_2 = 0$

Решење y_{p_2} тражимо у облику $y_{p_2} = B_1 x \cos 3x + B_2 x \sin 3x$ и налазимо $B_1 = 0$ и $B_2 = -\frac{1}{12}$.

Према томе, опште решење је $y = y_{p_1} + y_{p_2} + y_h = C_1 \cos 3x + (-\frac{1}{12}x + C_2)\sin 3x + \frac{1}{16}\cos x$.

Најзад, из $y(0) = C_1 + \frac{1}{16} = 1$ и $y'(0) = 3C_2 = 0$ добијамо $C_1 = \frac{15}{16}$, $C_2 = 0$ и $y = \frac{15}{16}\cos 3x - \frac{1}{12}x \sin 3x + \frac{1}{16}\cos x$.

4. Наћи опште решење диференцијалне једначине $x^2y'' + xy' - y = x$

Решење. Ово је Ојлерова једначина и решавамо је сменом $x = e^t$ и $y = z(t)$. Пошто је $xy' = z'$ и $x^2y'' = z'' - z'$, добијамо линеарну једначину с константним коефицијентима $z'' - z = e^t$. Карактеристични полином је $\lambda^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda+1)$, па је хомогено решење добијене једначине $z_h = C_1e^t + C_2e^{-t}$.

Партикуларно решење тражимо у облику $z_p = Ate^t$ и налазимо га за $A = \frac{1}{2}$. Следи да је $z = z_p + z_h = (\frac{1}{2}t + C_1)e^t + C_2e^{-t}$. Враћањем $t = \ln x$ добијамо $y = (\frac{1}{2}\ln x + C_1)x + \frac{C_2}{x}$.

5. Наћи опште решење диференцијалне једначине $(x-1)y'' - 2xy' + 4y = x - 1$. Да ли је $y = 8^{\lambda x}$ решење одговарајуће хомогене једначине за неко λ?

Решење. Да проверимо да ли је $y_1 = 8^{\lambda x}$ хомогено решење: имамо $y_1 = e^{\mu x}$, где је $\mu = \lambda \ln 8$, и тада је $y_1' = \mu e^{\mu x}$, $y_1'' = \mu^2 e^{\mu x}$ и $(x-1)y_1'' - 2xy_1' + 4y_1 = [\mu^2(x-1) - 2\mu x + 4]e^{\mu x} = [(\mu^2 - 2\mu)x - (\mu^2 - 4)]e^{\mu x}$, а то је нула само када је $\mu^2 - 2\mu = \mu^2 - 4 = 0$, тј. за $\mu = 2$; тада је $\lambda = 2/\ln 8$ и $y_1 = e^{2x}$.

Сада Лиувилова формула даје друго хомогено решење: $y_2 = 2x^2 - 2x + 1$. Партикуларно решење тражимо у облику линеарног полинома и налазимо $y_p = \frac{2x-1}{4}$.

Опште решење је $y = \frac{2x-1}{4} + C_1e^{2x} + C_2(2x^2 - 2x + 1)$.

6. Решити диференцијалну једначину $y'' - 2y' \operatorname{tg} x - 2y = 1$. Није забрањено користити смену $z = y \cos x$.

Решење. Користићемо оно што није забрањено: ако је $y = \frac{z}{\cos x}$, онда је $y' = \frac{z' \cos x + z \sin x}{\cos^2 x}$ и одатле $y'' = \frac{z'' \cos^2 x + 2z' \cos x \sin x + z(2 - \cos^2 x)}{\cos^3 x}$. Тако једначина $y'' - 2y' \operatorname{tg} x - 2y = 1$ након сређивања (испишите, па се уверите!) постаје линеарна са константним коефицијентима: $z'' - z = \cos x$.

Партикуларно решење је $z_p = -\frac{1}{2}\cos x$, хомогено је $z_h = C_1e^x + C_2e^{-x}$, па тако добијамо $z = z_p + z_h$ и $y = \frac{z}{\cos x} = -\frac{1}{2} + C_1 \cdot \frac{e^x}{\cos x} + C_2 \cdot \frac{e^{-x}}{\cos x}$.

7. Наћи решење једначине $2y'^2 - yy'' = y^2(xy - 1)$ уз услов $y(0) = y'(0) = 1$. Пролази ли смена $y = 1/z$?

Решење. Користићемо понуђену смену: имаћемо $y' = -z^{-2}z'$ и $y'' = 2z^{-3}z'^2 - z^{-2}z''$. Заменом у дату једначину добијамо $2z^{-4}z'^2 - 2z^{-4}z'^2 + z^{-3}z'' = z^{-2}(xz^{-1} - 1)$ и, након множења са z^3, $z'' + z = x$. Ову једначину лако решавамо: $z = x + C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

Почетни услови $y(0) = \frac{1}{z(0)} = 1$ и $y'(0) = -\frac{z'(0)}{z(0)^2} = 1$ дају $z(0) = C_1 = 1$ и $z'(0) = 1 + C_2 = -1$, па је $C_1 = 1$ и $C_2 = -2$. Следи $y = \frac{1}{x + \cos x - 2\sin x}$.

8. Решити диференцијалну једначину $2xy'' + y' + y = x$ коришћењем смене $z(x) = y(x^2)$.

Решење. Ако је $z(x) = y(x^2)$, онда је $z'(x) = 2xy'(x^2)$ и $z''(x) = 4x^2y''(x^2) + 2y'(x^2)$.

Ако у једначини $2xy'' + y' + y = x$ заменимо x са x^2, добијамо $2x^2y''(x^2) + y'(x^2) + y(x^2) = x^2$, тј. $\frac{1}{2}z''(x) + z(x) = x^2$. То је једначина са константним коефицијентима коју умемо да решимо: $z_h(x) = C_1 \sin(\sqrt{2}x) + C_2 \cos(\sqrt{2}x)$ и $z_p(x) = x^2 - 1$, дакле $z(x) = x^2 - 1 + C_1 \sin(\sqrt{2}x) + C_2 \cos(\sqrt{2}x)$. Најзад, $y(x) = z(\sqrt{x}) = x - 1 + C_1 \cos\sqrt{2x} + C_2 \sin\sqrt{2x}$.

9. Наћи опште решење једначине $(\frac{1}{4} + e^{-2x})y'' + y' + y = 0$ ако је познато да оно има облик $y(x) = (C_1 + C_2x)y_0(x)$, где је $y_0(x)$ једно партикуларно решење, а C_1 и C_2 произвољне константе.

Решење. Означимо $P = \frac{1}{4} + e^{-2x}$. По услову, $y = y_0$ и $y = xy_0$ су решења диференцијалне једначине $Py'' + y' + y = 0$. Имамо $(xy_0)' = xy_0' + y_0$ и $(xy_0)'' = xy_0'' + 2y_0'$. Према томе, $Py_0'' + y_0' + y_0 = 0$ и $P(xy_0)'' + (xy_0)' + xy_0 = xPy_0'' + (2P + x)y_0' + (x + 1)y_0 = 0$. Када од друге једначине одузмемо прву помножену са x, добијамо $2Py_0' + y_0 = 0$, што је обична једначина са раздвојеним промењљивим. Сада је $\frac{-2dy_0}{y_0} = \frac{dx}{P}$, а одатле интеграцијом $-2\ln|y_0| = \int \frac{dx}{\frac{1}{4} + e^{-2x}} = 2\ln(e^{2x} + 4) + \text{const}$, те је $y_0 = \frac{C}{e^{2x}+4}$.

Према томе, опште решење једначине из задатка је $y = \frac{C_1 + C_2x}{e^{2x}+4}$.

3. Системи диференцијалних једначина

Овде се бавимо системима првог реда са n непознатих функција $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$:

$$\begin{cases} y_1' = F_1(y_1, y_2, \ldots, y_n, x), \\ y_2' = F_2(y_1, y_2, \ldots, y_n, x), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \cdots \\ y_n' = F_n(y_1, y_2, \ldots, y_n, x), \end{cases}$$

где су $F_i(t_1, t_2, \ldots, t_{n+1})$ за $i = 1, \ldots, n$ дате диференцијабилне функције по $n+1$ променљивих.

Један начин на који се може приступити решавању оваквих система је метод елиминације. Имамо

$$\begin{aligned} y_1'' &= \frac{d}{dx} F_1(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x), x) \\ &= \frac{\partial F_1}{\partial t_1} \cdot y_1' + \frac{\partial F_1}{\partial t_2} \cdot y_2' + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial t_n} \cdot y_n' + \frac{\partial F_1}{\partial t_{n+1}} \\ &= \frac{\partial F_1}{\partial t_1} \cdot F_1 + \frac{\partial F_1}{\partial t_2} \cdot F_2 + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial t_n} \cdot F_n + \frac{\partial F_1}{\partial t_{n+1}}, \end{aligned}$$

што је функција по вредностима x и $y_1(x), \ldots, y_n(x)$. На исти начин, сви изводи вишег реда могу се представити у облику неких функција по вредностима x и $y_1(x), \ldots, y_n(x)$. Овако добијамо систем n једначина из којег се може елиминисати $n-1$ непознатих вредности $y_2(x), \ldots, y_n(x)$, чиме остаје диференцијална једначина реда n по y_1.

Пример 12. Решити систем једначина $\begin{cases} y_1' = y_2 - x, \\ y_2' = 2y_1/x^2. \end{cases}$

Решење. Диференцирање прве једначине даје $y_1'' = y_2' - 1 = 2y_1/x^2 - 1$, тј. $x^2 y_1'' - 2y_1 = -x^2$.

Ово је Ојлерова једначина по y_1 чије је опште решење $y_1 = -\frac{1}{3}x^2 \ln x + C_1 x^2 + \frac{C_2}{x}$.

Коначно, $y_2 = y_1' + x = -\frac{2}{3}x \ln x + (2C_1 - \frac{1}{3})x - \frac{C_2}{x^2}$.

Систем линеарних једначина са константним коефицијентима

Посматрајмо систем

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n + b_1(x), \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n + b_2(x), \\ \quad \cdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n + b_n(x), \end{cases} \tag{10}$$

где су $y_1, \ldots, y_n$ непознате функције по променљивој x, а a_{ij} константе. Овај систем се методом елиминације своди на линеарну једначину по y_1 реда (највише) n са константним коефицијентима.

Пример 13. Решити систем једначина по непознатим функцијама $x(t), y(t), z(t)$: $\begin{cases} x' = 3x + 2y + 6z, \\ y' = x + 2y + 3z, \\ z' = y + 6z. \end{cases}$

Решење. Изразићемо прва три извода функције x преко вредности x, y, z:

$$\begin{aligned} x' &= 3x + 2y + 6z, \\ x'' &= 3x' + 2y' + 6z' = 3(3x + 2y + 6z) + 2(x + 2y + 3z) + 6(y + 6z) = 11x + 16y + 60z, \\ x''' &= 11x' + 16y' + 60z' = 11(3x + 2y + 6z) + 16(x + 2y + 3z) + 60(y + 6z) = 49x + 114y + 474z. \end{aligned}$$

Из прве једнакости елиминишемо $z = \frac{1}{6}(x' - 3x - 2y)$, чиме друге две једначине постају $x'' = 10x' - 19x - 4y$ и $x''' = 79x' - 188x - 44y$. Затим елиминишемо $y = \frac{1}{4}(-x'' + 10x' - 19x)$, чиме друга једначина даје линеарну по x: $x''' - 11x'' + 31x' - 21x = 0$. Њен карактеристични полином је $T(\lambda) = \lambda^3 - 11\lambda^2 + 31\lambda - 21 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda - 7)$, па је опште решење $x = C_1 e^t + C_2 e^{3t} + C_3 e^{7t}$.

Сада налазимо

$$\begin{aligned} y &= \tfrac{1}{4}(-x'' + 10x' - 19x) = -\tfrac{5}{2}C_1 e^t + \tfrac{1}{2}C_2 e^{3t} + \tfrac{1}{2}C_3 e^{7t}, \\ z &= \tfrac{1}{6}(x' - 3x - 2y) = \tfrac{1}{2}C_1 e^t - \tfrac{1}{6}C_2 e^{3t} + \tfrac{1}{2}C_3 e^{7t}. \end{aligned}$$

Пример 14. Решити систем једначина по непознатим функцијама $x(t), y(t)$: $\begin{cases} x' = 2x + \ \ y + e^t, \\ y' = 2x + 3y + e^{-t}. \end{cases}$

Решење. Диференцирање прве једначине даје $x'' = 2x' + y' + e^t = 2(2x + y + e^t) + (2x + 3y + e^{-t}) + e^t = 6x + 5y + 3e^t + e^{-t}$. Елиминацијом $y = x' - 2x - e^t$ из прве једначине добијамо $x'' = 6x + 5(x' - 2x - e^t) + 3e^t + e^{-t} = 5x' - 4x - 2e^t + e^{-t}$, тј. $x'' - 5x' + 4x = e^{-t} - 2e^t$.

Опште решење по x је $x = (\frac{2}{3}t + C_1)e^t + C_2 e^{4t} + \frac{1}{10}e^{-t}$.

Одавде налазимо $y = (-\frac{2}{3}t - C_1 - \frac{1}{3})e^t + 2C_2 e^{4t} - \frac{3}{10}e^{-t}$.

Систем (10) се може записати у облику хомогене линеарне диференцијалне једначине првог реда по векторској функцији $\vec{y}$:

$$\vec{y}' = A\vec{y} + B, \qquad \text{где је} \qquad \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Хомоген систем има облик

$$\vec{y}' = A\vec{y}. \tag{11}$$

Испитајмо за које λ постоји константни ненула вектор $\vec{v} = [v_1\ v_2\ \dots\ v_n]^T$ такав да је $\vec{y} = e^{\lambda t}\vec{v}$ решење система (11). Како је $\vec{y}' = \lambda e^{\lambda t}\vec{v}$, систем (11) се своди на $\lambda e^{\lambda t}\vec{v} = Ae^{\lambda t}\vec{v}$, тј.

$$(A - \lambda I)\vec{v} = 0. \tag{12}$$

Ова једначина по $\vec{v}$ има нетривијално решење ако и само ако је $\det(A - \lambda I) = 0$. За дату $n \times n$ матрицу A, израз

$$\chi_A(t) = (-1)^n \det(A - tI) = \det(tI - A)$$

је моничан полином степена n - *карактеристични полином* матрице A. Његове нуле се називају *сопственим вредностима* матрице A. Према томе, λ мора да буде сопствена вредност. Вектор $\vec{v}$ се тада добија као нетривијално решење једначине (12) - он се назива *сопствени вектор* матрице A.

Систем једначина у симетричном облику

Нека је систем диференцијалних једначина по непознатим $x_1, \dots, x_n$ задат у облику

$$\frac{dx_1}{F_1} = \frac{dx_2}{F_2} = \cdots = \frac{dx_n}{F_n}, \tag{13}$$

где су $F_1, F_2, \dots, F_n$ дате функције по $x_1, \dots, x_n$. Еквивалентан запис истог система био би

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{F_2}{F_1}, \quad \frac{dx_3}{dx_1} = \frac{F_3}{F_1}, \quad \dots \quad , \quad \frac{dx_n}{dx_1} = \frac{F_n}{F_1}$$

или параметарски, ако величину у (13) означимо са dt,

$$x_1' = \frac{dx_1}{dt} = F_1, \quad x_2' = \frac{dx_2}{dt} = F_2, \quad \dots \quad , \quad x_n' = \frac{dx_n}{dt} = F_n.$$

Решење оваквог система често добијамо у имплицитном или параметарском облику. Имплицитан облик би подразумевао $n-1$ (различитих) веза између величина $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Пример 15. Решити систем једначина $\dfrac{dx}{y^2 - z^2} = \dfrac{dy}{z^2 - x^2} = \dfrac{dz}{x^2 - y^2}$.

Решење. Ако означимо $\frac{dx}{y^2-z^2}=dt$ и уведемо t као параметар, имамо $dx=(y^2-z^2)dt$, $dy=(z^2-x^2)dt$ и $dz=(x^2-y^2)dt$.

Сабирањем добијамо $dx+dy+dz=0$, одакле је $x+y+z=C_1$ константно. С друге стране, множењем једначина са x^2, y^2 и z^2 добијамо $x^2dx+y^2dy+z^2dz=[x^2(y^2-z^2)+y^2(z^2-x^2)+z^2(x^2-y^2)]dt=0$, што интеграцијом даје $x^3+y^3+z^3=C_2$.

Тако смо добили имплицитно дату фамилију решења: $\begin{cases} x+y+z=C_1, \\ x^3+y^3+z^3=C_2. \end{cases}$

Задаци

1. Решити систем једначина $\begin{cases} x'=3x+2y+2z, \\ y'=2x+3y+3z, \\ z'=\ \ x+\ \ y+\ \ z. \end{cases}$

Решење. Диференцирањем прве једначине добијамо $x''=3x'+2y'+2z'=3(3x+2y+2z)+2(2x+3y+3z)+2(x+y+z)=15x+14y+14z$ и већ одавде можемо да направимо диференцијалну једначину по x: заменом $z=\frac{1}{2}(x'-3x-2y)$ следи $x''-7x'+6x=0$ с карактеристичним полиномом $T(\lambda)=\lambda^2-7\lambda+6=(\lambda-1)(\lambda-6)$, те је $x=C_1e^t+C_2e^{6t}$.

Међутим, y не можемо да изразимо директно, већ само диференцијалном једначином: $y'=2x+3y+3z=2x+3y+\frac{3}{2}(x'-3x-2y)=\frac{1}{2}(3x'-5x)=-C_1e^t+\frac{13}{2}C_2e^{6t}$, одакле је $y=\int y'dx=-C_1e^t+\frac{13}{12}C_2e^{6t}+C_3$. Најзад, $z=\frac{1}{2}(x'-3x-2y)=\frac{5}{12}C_2e^{6t}-C_3$.

2. Наћи опште решење $x(t),y(t)$ система $\begin{cases} x'=3x-2y+\cos t, \\ y'=5x-3y. \end{cases}$

Решење. Имамо $x''=3x'-2y'-\sin t=3(3x-2y+\cos t)-2(5x-3y)-\sin t=-x+3\cos t-\sin t$, тј. $x''+x=3\cos t-\sin t$. Хомогено решење ове једначине је $x_h=C_1\cos t+C_2\sin t$, а партикуларно има облик $x_p=t(A\cos t+B\sin t)$. Пошто је тада $x_p''+x_p=2B\cos t-2A\sin t$, следи да је $A=\frac{1}{2}$, $B=\frac{3}{2}$ и $x=x_p+x_h=(\frac{1}{2}t+C_1)\cos t+(\frac{3}{2}t+C_2)\sin t$.

Прва једначина система даје $y=\frac{1}{2}(3x-x'+\cos t)=\frac{6C_1-2C_2+1}{4}\cos t+(\frac{5}{2}t+\frac{6C_2+2C_1-3}{4})\sin t$.

3. Решити систем једначина $\dfrac{dx}{z-y}=\dfrac{dy}{xz+1}=\dfrac{dz}{xy+1}$.

Решење. Означимо $\frac{dx}{z-y}=dt$; тада је $dx=(z-y)dt$, $dy=(xz+1)dt$, $dz=(xy+1)dt$. Имамо $ydy-zdz=(y-z)dt=-dx$, одакле интеграцијом добијамо $2x+y^2-z^2=C_1$.

Имамо и $dy-xdx=(xy+1)dt=dz$, па је $x^2-2y+2z=C_2$.

4. Решити систем једначина $\dfrac{dx}{x^3+xyz}=\dfrac{dy}{2y^3}=\dfrac{dz}{2y^2z}$.

Решење. Из друге једнакости је $\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$ и интеграцијом $\ln|y|-\ln|z|=\text{const}$, одакле је $\frac{z}{y}=C_1$ за неку константу C_1.

Сада можемо да елиминишемо z, па прва једнакост постаје $\frac{dx}{x^3+C_1xy^2}=\frac{dy}{2y^3}$, тј. $\frac{dx}{dy}=\frac{x^3+C_1xy^2}{2y^3}$. Препознајемо хомогену једначину и уводимо смену $x=y\cdot u$ и $\frac{dx}{dy}=u+yu'$, чиме добијамо $u+y\frac{du}{dy}=\frac{u^3+C_1u}{2}$, што је једначина са раздвојеним променљивим: $\frac{dy}{y}=\frac{2du}{u^3+(C_1-2)u}$. Интеграција даје $\ln y=\frac{1}{C_1-2}\ln|\frac{u^2}{u^2+C_1-2}|+\text{const}$ и одатле $C_2y^{C_1-2}=\frac{u^2}{u^2+C_1-2}$. Враћањем $u=\frac{x}{y}$ и $C_1=\frac{z}{y}$ добијамо коначно $C_2y^{z/y}=\frac{x^2y^2}{x^2-2y^2+yz}$.

Дакле, опште решење је фамилија кривих $\begin{cases} z=C_1y, \\ \frac{x^2y^2}{x^2-2y^2+yz}=C_2y^{z/y}. \end{cases}$