Математика 3 - писмени део испита   9.2.2014.

Група 1 - решења

1. Одредити партикуларно решење система

$$\frac{dx}{dt} + 2x + y - \sin t = 0$$
$$\frac{dy}{dt} - 4x - 2y - \cos t = 0$$

које испуњава услове

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$$

Решење. Запишимо дати систем као

$$\dot{x} + 2x + y - \sin t = 0$$
$$\dot{y} - 4x - 2y - \cos t = 0.$$

Диференцирањем прве једначине по t добијамо

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + \dot{y} - \cos t = 0,$$

односно, када изразимо $\dot{x}$ и $\dot{y}$ из полазних једначина,

$$\ddot{x} + 2(-2x - y + \sin t) + (4x + 2y + \cos t) - \cos t = 0,$$

одакле је

$$\ddot{x} = -2\sin t.$$

Након прве интеграције следи

$$\dot{x} = 2\cos t + c_1,$$

а након друге интеграције добијамо

$$x = 2\sin t + c_1 t + c_2.$$

Ако из прве једначине полазног система изразимо y имамо

$$y = -\dot{x} - 2x + \sin t,$$

односно, после замене x и $\dot{x}$,

$$y = -3\sin t - 2\cos t - (2t + 1)c_1 - 2c_2.$$

Уврштавањем услова

$$x(0) = 1, \qquad y(0) = 0,$$

у претходно добијено опште решење система

$$\begin{aligned} x &= 2\sin t + c_1 t + c_2 \\ y &= -3\sin t - 2\cos t - (2t+1)c_1 - 2c_2, \end{aligned}$$

добијамо систем

$$\begin{aligned} 1 &= c_2 \\ 0 &= -2 - c_1 - 2c_2, \end{aligned}$$

чије је решење

$$c_1 = -4, \qquad c_2 = 1.$$

Заменом добијених c_1 и c_2 у опште решење долазимо до траженог партикуларног решења

$$\begin{aligned} x &= 2\sin t - 4t + 1 \\ y &= -3\sin t - 2\cos t + 8t + 2. \end{aligned}$$

2. Одредити дивергенцију, ротор и векторске линије векторске функције

$$r^2 \left(z\,\vec{i} + x\,\vec{k} \right),$$

где је r интензитет вектора положаја $\vec{r}$ произвољне тачке у простору.

<u>Решење</u>. Како бисмо одредили дивергенцију дате векторске функције искористимо

$$\operatorname{div}\left(r^2 \left(z\,\vec{i} + x\,\vec{k} \right) \right) = \operatorname{grad} r^2 \cdot \left(z\,\vec{i} + x\,\vec{k} \right) + r^2 \operatorname{div}\left(z\,\vec{i} + x\,\vec{k} \right).$$

Одредимо прво

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} r^2 &= \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2), \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+z^2), \frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2+z^2) \right) \\ &= (2x, 2y, 2z) = 2(x,y,z) = 2\vec{r}, \end{aligned}$$

а затим

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\left(z\,\vec{i}+x\,\vec{k}\right) &= \nabla\ \cdot\ \left(z\,\vec{i}+x\,\vec{k}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\ \cdot\ (z,0,x)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}z+\frac{\partial}{\partial y}0+\frac{\partial}{\partial z}x=0+0+0=0.\end{aligned}$$

На основу претходног је

$$\operatorname{div}\left(r^2\left(z\,\vec{i}+x\,\vec{k}\right)\right)=2\vec{r}\cdot\left(z\,\vec{i}+x\,\vec{k}\right)+r^2\cdot 0=2(x,y,z)\cdot(z,0,x)+0=4xz.$$

За одређивање ротора користимо

$$\operatorname{rot}\left(r^2\left(z\,\vec{i}+x\,\vec{k}\right)\right)=\operatorname{grad}r^2\times\left(z\,\vec{i}+x\,\vec{k}\right)+r^2\operatorname{rot}\left(z\,\vec{i}+x\,\vec{k}\right).$$

Овде је

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\left(z\,\vec{i}+x\,\vec{k}\right) &= \nabla\ \times\ \left(z\,\vec{i}+x\,\vec{k}\right)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ z & 0 & x\end{vmatrix}\\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y}x-\frac{\partial}{\partial z}0\right)\vec{i}-\left(\frac{\partial}{\partial x}x-\frac{\partial}{\partial z}z\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial}{\partial x}0-\frac{\partial}{\partial y}z\right)\vec{k}\\ &= (0-0)\,\vec{i}-(1-1)\,\vec{j}+(0-0)\,\vec{k}=\vec{0},\end{aligned}$$

па је даље

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\left(r^2\left(z\,\vec{i}+x\,\vec{k}\right)\right) &= 2\vec{r}\times\left(z\,\vec{i}+x\,\vec{k}\right)+r^2\,\vec{0}=2\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ z & 0 & x\end{vmatrix}+\vec{0}\\ &= 2\left(xy\,\vec{i}+(z^2-x^2)\,\vec{j}-yz\,\vec{k}\right).\end{aligned}$$

Векторске линије одређујемо из одговарајућег система диференцијалних једначина у симетричном облику

$$\frac{dx}{r^2z}=\frac{dy}{0}=\frac{dz}{r^2x},$$

односно

$$\frac{dx}{z} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{x}.$$

На пример, у једнакости

$$\frac{dx}{z} = \frac{dy}{0}$$

је именилац у разломку са десне стране једнак 0, па и бројилац мора бити једнак 0, односно

$$dy = 0,$$

одакле следи

$$c_1 = y.$$

Из једнакости

$$\frac{dx}{z} = \frac{dz}{x}$$

имамо

$$x\,dx = z\,dz,$$

одакле након интеграције добијамо

$$c_2 = x^2 - z^2.$$

Дакле, векторске линије дате векторске функције су

$$c_1 = y, \quad c_2 = x^2 - z^2.$$

3. Израчунати криволинијски интеграл

$$\oint_C 2(x^2 + y^2)\,dx + (x + y)^2\,dy,$$

где је C троугао са теменима $A(2,0)$, $B(1,2)$, $C(1,1)$.
Решење. Важи

$$
\begin{aligned}
I &= \oint_C 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2 dy = \left\{ \begin{array}{c} \text{Гринова} \\ \text{формула} \end{array} \right\} \\
&= \iint\limits_G \left(\frac{\partial}{\partial x}\left((x+y)^2\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(2(x^2+y^2)\right) \right) dxdy \\
&= \iint\limits_G (2x+2y-4y)\, dxdy = 2\iint\limits_G (x-y)\, dxdy,
\end{aligned}
$$

где је G област омеђена троуглом C. Како је $y = 2(2-x)$ једначина праве кроз тачке A и B, а $y = 2-x$ једначина праве кроз тачке A и C, то су границе $x|_1^2$, $y|_{2-x}^{2(2-x)}$, па је

$$
\begin{aligned}
I &= 2\int_1^2 dx \int_{2-x}^{2(2-x)} (x-y)dy = 2\int_1^2 \left[xy - \frac{y^2}{2} \right] \Bigg|_{2-x}^{2(2-x)} dx \\
&= \int_1^2 \left(-5x^2 + 16x - 12 \right) dx = \left[-5\frac{x^3}{3} + 16\frac{x^2}{2} - 12x \right] \Bigg|_1^2 = \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

4. Израчунати запремину тела

$$
T = \left\{ (x,y,z) : \left(\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} \right)^2 \le \frac{x}{2} \right\}.
$$

Решење. Тражену запремину рачунамо као

$$
V = \iiint\limits_T dxdydz.
$$

Преласком на уопштене сферне координате

$$
x = 2\rho\sin\theta\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\theta\sin\varphi, \quad z = 3\rho\cos\theta,
$$

тело

$$
T : \left(\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} \right)^2 \le \frac{x}{2}
$$

трансформишемо у тело

$$
U : (\rho^2)^2 \le \frac{2\rho\sin\theta\cos\varphi}{2},
$$

односно

$$U: \ \rho \leq \sqrt[3]{\sin\theta\cos\varphi},$$

одакле добијамо границе $\rho \,|_0^{\sqrt[3]{\sin\theta\cos\varphi}}$, $\varphi \,|_{-\pi/2}^{\pi/2}$, $\theta \,|_0^{\pi}$ (како је $\rho > 0$ и $\rho < \sqrt[3]{\sin\theta\cos\varphi}$, мора бити и $\sqrt[3]{\sin\theta\cos\varphi} > 0$, односно $\sin\theta\cos\varphi > 0$, а како је $\sin\theta > 0$ (јер $\theta \in (0,\pi)$), то је $\cos\varphi > 0$, односно $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$). Јакобијан је $J = 2 \cdot 3 \cdot \rho^2 \sin\theta = 6\rho^2\sin\theta$. Даље је

$$\begin{aligned}
V &= \iiint\limits_U 6\rho^2 \sin\theta d\rho d\varphi d\theta = 6\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{\sqrt[3]{\sin\theta\cos\varphi}} \rho^2 d\rho \\
&= 6\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \left[\frac{\rho^3}{3}\right]\Bigg|_0^{\sqrt[3]{\sin\theta\cos\varphi}} d\theta \\
&= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \int_0^{\pi} \sin^2\theta d\theta = 2 \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi.
\end{aligned}$$

Математика 3 - писмени део испита   9.2.2015.

Група 2 - решења

1. Одредити партикуларно решење система

$$\frac{dx}{dt} - 2x - 4y - \cos t = 0$$
$$\frac{dy}{dt} + x + 2y - \sin t = 0$$

које испуњава услове

$$x(0) = 0, \qquad y(0) = 1.$$

<u>Решење</u>. У овом задатку дат је исти систем као у 1. задатку групе 1, с тим што су замењене улоге x и y. Тражено партикуларно решење је

$$x = -3\sin t - 2\cos t + 8t + 2$$
$$y = 2\sin t - 4t + 1.$$

2. Одредити дивергенцију, ротор и векторске линије векторске функције

$$r^2\left(z\,\vec{j} + y\,\vec{k}\right),$$

где је r интензитет вектора положаја $\vec{r}$ произвољне тачке у простору.

<u>Решење</u>. Овај задатак се решава аналогно 2. задатку групе 1. Добија се дивергенција

$$\operatorname{div}\left(r^2\left(z\,\vec{j} + y\,\vec{k}\right)\right) = 4yz,$$

ротор

$$\operatorname{rot}\left(r^2\left(y\,\vec{i} + x\,\vec{j}\right)\right) = 2\left((y^2 - z^2)\,\vec{i} - xy\,\vec{j} + xz\,\vec{k}\right),$$

и векторске линије

$$c_1 = x, \quad c_2 = y^2 - z^2.$$

3. Израчунати криволинијски интеграл

$$\oint_C 2(x^2 + y^2)\,dx + (x + y)^2\,dy,$$

где је C троугао са теменима $A(1,0)$, $B(2,1)$, $C(2,2)$.
Решење. Овај задатак се решава аналогно 3. задатку групе 1. Добија се

$$\oint_C 2(x^2+y^2)\,dx+(x+y)^2\,dy=\frac{2}{3}.$$

4. Израчунати запремину тела

$$T=\left\{(x,y,z):\ \left(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+z^2\right)^2\le\frac{x}{3}\right\}.$$

Решење. Овај задатак се решава аналогно 4. задатку групе 1. Добија се

$$V=2\pi.$$