Univerzitet u Beogradu
Mašinski fakultet
Katedra za Matematiku

12.11.2016.

Prvi kolokvijum iz predmeta Matematika 1

1. grupa

1. Date su tačke $A(4,1,3)$, $B(2,-3,0)$, $C(1,2,-3)$ i $D(0,-4,5)$.

   a) Izračunati zapreminu tetraedra $ABCD$.

   b) Izračunati visinu tetraedra iz temena D.

   c) Napisati jednačinu ravni ABC.

   d) Napisati jednačinu visine iz temena D.

   Rešenje: a) Kako je zapremina tetraedra jednaka šestini zapremine paralelopipeda nastalog od tri vektora ivica tog tetraedra koji izviru iz nekog njegovog temena (svejedno je kog), traženu zapreminu možemo računati kao jednu šestinu apsolutne vrednosti mešovitog proizvoda

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -3 \\ -3 & 1 & -6 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix} = -121,$$

odnosno $V = \dfrac{121}{6}$.

b) Kako je po poznatoj formuli zapremina tetraedra $V = \dfrac{1}{3} P_{ABC} \cdot H_D$, s obzirom na

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -4 & -3 \\ -3 & 1 & -6 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 1 & -6 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -3 & -6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \right) = (27, -3, -14)$$

i

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{27^2 + 3^2 + 14^2} = \frac{1}{2} \sqrt{934},$$

dobijamo

$$H_D = \frac{3V}{P_{ABC}} = \frac{\frac{121}{2}}{\frac{\sqrt{934}}{2}} = \frac{121}{\sqrt{934}}.$$

c) Upravo je vektor $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ normalan na ravan ABC (kao i vektorski proizvod svaka dva medjusobno neparalelna vektora te ravni), te se njena jednačina može zapisati kao

$$27(x - x_0) - 3(y - y_0) - 14(z - z_0) = 0, \text{ tj. } 27x - 3y - 14z = 27x_0 - 3y_0 - 14z_0,$$

gde x_0, y_0, z_0 mogu biti koordinate bilo koje tačke te ravni. Bilo da za poslednje uzmemo koordinate tačke A, bilo da uzmemo koordinate tačke B, bilo koordinate tačke C, desna strana će iznositi 63 (mora za svaku tačku da bude isto), pa je

$$(ABC) : 27x - 3y - 14z = 63.$$

d) Prava koja sadrži tačku $D(0,-4,5)$ i ima vektor pravca $(27,-3,-14)$:

$$\frac{x}{27} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z-5}{-14}.$$

2. Rešiti matričnu jednačinu $XAB = C + X$, ako su date matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = A^T, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešenje: Data matrična jednačina je ekvivalentna sa $X = C(AB - E)^{-1}$, ako je $\det(AB - E) \neq 0$. Dalje je

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 11 \\ 3 & 11 & 34 \end{bmatrix},$$

pa je

$$AB - E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 11 \\ 3 & 11 & 33 \end{bmatrix}.$$

Njena determinanta je $-36 \neq 0$, pa postoji inverzna matrica

$$(AB - E)^{-1} = \frac{1}{-36} \begin{bmatrix} 11 & -33 & 10 \\ -33 & -9 & 6 \\ 10 & 6 & -4 \end{bmatrix},$$

pa je

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -11/36 & 11/12 & -5/18 \\ 11/12 & 1/4 & -1/6 \\ -5/18 & -1/6 & 1/9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11/36 & 11/12 & -5/18 \\ 23/36 & 1/12 & -1/18 \end{bmatrix}.$$

3. U zavisnosti od realnog parametra a rešiti sistem

$$\begin{aligned} x + ay - z &= 5, \\ 3x - y - az &= a - 3 \\ 6x + (3a-1)y - 5z &= 14. \end{aligned}$$

Rešenja: Sistem rešavamo uz pomoć Kramerovog pravila, dobijamo da su odgovarajuće determinante jednake

$$\begin{aligned}
\Delta &= \begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 3 & -1 & -a \\ 6 & 3a-1 & -5 \end{vmatrix} = -3a^2 + 5a + 2 = -(a-2)(3a+1), \\
\Delta_x &= \begin{vmatrix} 5 & a & -1 \\ a-3 & -1 & -a \\ 14 & 3a-1 & -5 \end{vmatrix} = 3a^2 - 10a + 8 = (a-2)(3a-4), \\
\Delta_y &= \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 3 & a-3 & -a \\ 6 & 14 & -5 \end{vmatrix} = 30 - 15a = -15(a-2), \\
\Delta_z &= \begin{vmatrix} 1 & a & 5 \\ 3 & -1 & a-3 \\ 6 & 3a-1 & 14 \end{vmatrix} = 3a^2 - 5a - 2 = (a-2)(1+3a).
\end{aligned}$$

Bitno je glavnu determinantu rastaviti i diskutovati u zavisnosti od toga kad je različita od 0 i kad je jednaka 0 (za ostale determinante je u ovom rešenju rastavljanje takodje sprovedeno, mada nije neophodno).

Za $a \neq 2, -\dfrac{1}{3}$ nalazimo da sistem ima jedinstveno rešenje

$$(x, y, z) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta}\right) = \left(\frac{4-3a}{3a+1}, \frac{15}{3a+1}, -1\right).$$

Za $a = -\dfrac{1}{3}$ je sistem protivrečan (čim je glavna determinanta jednaka 0 i pritom bar jedna od pomoćnih različita od 0, sistem je protivrečan i tu nikakva dalja diskusija nije potrebna).

Za $a = 2$ (kada su i glavna i sve tri pomoćne determinante jednake 0, neophodno je da se sprovede ovakva diskusija), dati sistem se svodi na

$$\begin{aligned}
\Sigma &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & -1 \\ 6 & 5 & -5 & 14 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 1 & -16 \\ 0 & -7 & 1 & -16 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 1 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

odakle vidimo da u ovom slučaju sistem ima beskonačno mnogo rešenja

$$(x, y, z) \in \{(-11 + 5t, t, -16 + 7t) \,|t \in \mathbb{R}\}.$$

4. Odrediti položaj datih pravih, a zatim i njihovo najkraće rastojanje:

$$p_1 : \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ 3x + y - 2z + 2 = 0 \end{cases}, \quad p_2 : \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{0}.$$

Ispitati da li postoji prava koja sadrži tačku M(1,2,-3) i seče date prave.

Rešenje:

Jednačina prave p_1 u kanonskom obliku je (radjeno je na času kako se do ovoga dolazi na osnovu datih uslova)

$$p_1 : \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}.$$

Jasno je da su dve p_1 i p_2 mimoilazne ako i samo ako za bilo koju tačku $M_1 \in p_1$ i bilo koju tačku $M_2 \in p_2$ važi da vektori datih pravih nisu koplanarni sa $\overrightarrow{M_1M_2}$, tj. ako i samo ako je njihov mešoviti proizvod $[\vec{p_1}, \vec{p_2}, \overrightarrow{M_1M_2}]$ različit od 0 (isto kao što su koplanarne ako i samo je $[\vec{p_1}, \vec{p_2}, \overrightarrow{M_1M_2}] = 0$). Za M_1 i M_2 možemo uzeti upravo tačke kroz koje su nam prave date u kanonskim jednačinama, $M_1(-1, 1, 0)$ i $M_2(2, 0, 0)$. Kako je sad

$$[\vec{p_1}, \vec{p_2}, \overrightarrow{M_1M_2}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -7 \neq 0,$$

to su prave p_1 i p_2 mimoilazne.

Deo vezan za odredjivanje najkraćeg rastojanja se može raditi nalaženjem zajedničke normale: ukoliko P_1P_2 predstavlja tu zajedničku normalu, gde su tačke $P_1 \in p_1$ i $P_2 \in p_2$ date sa $P_1(t_1-1, -t_1+1, t_1)$ i $P_2(t_2+2, 2t_2, 0)$ za neke t_1 i t_2, odgovarajuće t_1 i t_2 nalazimo iz uslova $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{p_1} = 0$ i $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{p_2} = 0$, a zatim izračunamo intenzitet vektora $\overrightarrow{P_1P_2}$.

Kako je $\overrightarrow{P_1P_2} = (t_2 - t_1 + 3, 2t_2 + t_1 - 1, -t_1)$, to su ova dva uslova ekvivalentni sa

$$(t_2 - t_1 + 3) - (2t_2 + t_1 - 1) + (-t_1) = 0, \quad 3t_1 + t_2 = 4$$

i

$$(t_2 - t_1 + 3) + 2\,(2t_2 + t_1 - 1) = 0, \quad t_1 + 5t_2 = -1,$$

odakle rešavanjem sistema po t_1 i t_2 dobijamo $t_1 = \frac{3}{2}$ i $t_2 = -\frac{1}{2}$. Sledi $\overrightarrow{P_1P_2} = (t_2 - t_1 + 3, 2t_2 + t_1 - 1, -t_1) = (1, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$, te $|\overrightarrow{P_1P_2}| = \frac{\sqrt{14}}{2}$, što je upravo dužina zajedničke normale.
Drugi način da se uradi zadatak bi bio da se pozovemo na gotovu formulu za rastojanje izmedju dve mimoilazne prave

$$d = \frac{|[\vec{p_1}, \vec{p_2}, \overrightarrow{M_1M_2}]|}{|\vec{p_1} \times \vec{p_2}|}.$$

Dalje je

$$\vec{p_1} \times \vec{p_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-2, 1, 3),$$

pa je traženo rastojanje

$$d = \frac{|-7|}{|\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 3^2}|} = \frac{7}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

Da bi se ispitala egzistencije prave sa opisanim svojstvom, potrebne je ustvari ispitati postoje li tačke $A \in p_1$ i $B \in p_2$ takve da su kolinearne sa M. Koordinate proizvoljne tačke $A_1 \in p_1$ su oblika $x = t_1 - 1$, $y = -t_1 + 1$, $z = t_1$ za neko $t_1 \in \mathbb{R}$, dok su koordinate proizvoljne tačke $A_1 \in p_2$ oblika $x = t_2 + 2$, $y = 2t_2$, $z = 0$ za neko $t_2 \in \mathbb{R}$. Kolinearnost tačaka M, A_1 i A_2 je ekvivalentna sa kolinearnošću vektora $\vec{MA_1}$ i $\vec{MA_2}$, odnosno sa

$$\overrightarrow{MA_1} \times \overrightarrow{MA_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ t_1 - 2 & -t_1 - 1 & t_1 + 3 \\ t_2 + 1 & 2t_2 - 2 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= \left(\begin{vmatrix} -t_1 - 1 & t_1 + 3 \\ 2t_2 - 2 & 3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} t_1 - 2 & t_1 + 3 \\ t_2 + 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} t_1 - 2 & -t_1 - 1 \\ t_2 + 1 & 2t_2 - 2 \end{vmatrix} \right) = (0, 0, 0),$$

tj.

$$\begin{aligned} -2t_1t_2 - t_1 - 6t_2 + 3 &= 0 \\ -t_1t_2 + 2t_1 - 3t_2 - 9 &= 0 \\ 3t_1t_2 - t_1 - 3t_2 + 5 &= 0. \end{aligned}$$

Eliminišući t_1t_2 iz npr. druge jednačine, $t_1t_2 = 2t_1 - 3t_2 - 9$ (najlakše nam je iz druge jer onda ne moramo nigde da pravimo razlomak) i zamenjujući redom u prvu i treću, dobijamo sistem dve linearne jednačine sa dve nepoznate t_1 i t_2,

$$\begin{aligned} -5t_1 + 21 &= 0 \\ 5t_1 - 12t_2 - 22 &= 0, \end{aligned}$$

čije je rešenje $t_1 = \dfrac{21}{5}$ i $t_2 = -\dfrac{1}{12}$.

Kako za dobijene vrednosti t_1 i t_2 zaista važi $t_1 t_2 = 2t_1 - 3t_2 - 9$, dobijamo da tačke $A_1\left(\dfrac{16}{5}, -\dfrac{16}{5}, \dfrac{21}{5}\right)$ prave p_1 i $A_2\left(\dfrac{11}{12}, -\dfrac{1}{6}, 0\right)$ sa p_2 jesu kolinearne sa tačkom M.

Napomena Drugi način da se radi ovaj deo zadatka bio bi da se nadje jednačina ravni odredjene tačkom M i jednom od pravih p_1 i p_2, npr. p_1; A_2 bi se onda moglo dobiti kao prodor prave p_2 kroz tu ravan (A_1 je presek prave MA_2 sa pravom p_1).

2. grupa

1. Date su tačke $A(3,1,4)$, $B(0,-3,2)$, $C(-3,2,1)$ i $D(5,-4,0)$.

   a) Izračunati zapreminu tetraedra $ABCD$.

   b) Izračunati visinu tetraedra iz temena D.

   c) Napisati jednačinu ravni ABC.

   d) Napisati jednačinu visine iz temena D.

   Zadatak je tipski potpuno isti kao odgovarajući zadatak za 1. grupu, jedino su date drugačije brojne vrednosti (i to samo delinično).

2. Rešiti matričnu jednačinu $ABX = C + 2X$, ako su date matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = A^T, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Rešenje: Data matrična jednačina je ekvivalentna sa $X = (AB - 2E)^{-1}C$, ako je $\det(AB - 2E) \neq 0$. Dalje je

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 11 \\ 3 & 11 & 34 \end{bmatrix},$$

   pa je

$$AB - 2E = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 11 \\ 3 & 11 & 32 \end{bmatrix}.$$

   Njena determinanta je $2 \neq 0$, pa postoji inverzna matrica

$$(AB - 2E)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -25 & -31 & 13 \\ -31 & -41 & 17 \\ 13 & 17 & -7 \end{bmatrix},$$

   pa je

$$X = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -25 & -31 & 13 \\ -31 & -41 & 17 \\ 13 & 17 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25/2 & -9 \\ -31/2 & -12 \\ 13/2 & 5 \end{bmatrix}.$$

3. U zavisnosti od realnog parametra m rešiti sistem

$$\begin{aligned} x + 7y - mz &= -1, \\ -2x - my + z &= m \\ 2x + 25y + (1 - 4m)z &= -1. \end{aligned}$$

Rešenje: Sistem rešavamo Kramerovom metodom, za odgovarajuće determinante dobijamo

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -m \\ -2 & -m & 1 \\ 2 & 25 & 1-4m \end{vmatrix} = 2m^2 - 7m + 3 = (m-3)(2m-1),$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -1 & 7 & -m \\ m & -m & 1 \\ -1 & 25 & 1-4m \end{vmatrix} = 18 - 6m = -6(m-3),$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -m \\ -2 & m & 1 \\ 2 & -1 & 1-4m \end{vmatrix} = -2m^2 + 7m - 3 = -(2m-1)(m-3),$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -1 \\ -2 & -m & m \\ 2 & 25 & -1 \end{vmatrix} = 36 - 12m = -12(m-3).$$

Za $m \neq 3, \frac{1}{2}$ nalazimo da sistem ima jedinstveno rešenje

$$(x,y,z) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta}\right) = \left(\frac{-6}{2m-1}, -1, \frac{-12}{2m-1}\right).$$

Bitno je glavnu determinantu rastaviti i diskutovati u zavisnosti od toga kad je različita od 0 i kad je jednaka 0 (za ostale determinante je u ovom rešenju rastavljanje takodje sprovedeno, mada nije neophodno).

Za $m = \frac{1}{2}$ je sistem protivrečan (čim je glavna determinanta jednaka 0 i pritom bar jedna od pomoćnih različita od 0, sistem je protivrečan i tu nikakva dalja diskusija nije potrebna).

Za $m = 3$ (kada su i glavna i sve tri pomoćne determinante jednake 0, neophodno je da se sprovede ovakva diskusija), dati sistem se svodi na

$$\begin{aligned}
\Sigma &= \begin{bmatrix} 1 & 7 & -3 & -1 \\ -2 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 25 & -11 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 7 & -3 & -1 \\ 0 & 11 & -5 & 1 \\ 0 & 11 & -5 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 7 & -3 & -1 \\ 0 & 11 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

odakle vidimo da u ovom slučaju sistem ima beskonačno mnogo rešenja

$$(x,y,z) \in \left\{ \left(\frac{-2(9+t)}{11}, \frac{1+5t}{11}, t \right) | t \in \mathbb{R} \right\}.$$

4. Odrediti položaj datih pravih, a zatim i njihovo najkraće rastojanje:

$$p_1 : \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + 3y - 2z + 2 = 0 \end{cases}, \quad p_2 : \frac{x}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{0}.$$

Ispitati da li postoji prava koja sadrži tačku M(1,2,-3) i seče date prave.

Zadatak je tipski potpuno isti kao odgovarajući zadatak za 1. grupu, jedino što su zamenjena mesta x i y-koordinati (što znači da će se i dobijena rešenja takodje razlikovati samo utoliko).

Nastavnik: Aleksandar Pejčev
Asistent: Rada Mutavdžić