Univerzitet u Beogradu
Mašinski fakultet
Katedra za Matematiku 15.02.2015.

Rešenja zadataka sa pismenog dela ispita iz predmeta Matematika 1, oktobar 2015. godine

Detaljnije su rešeni zadaci za 1. grupu.

1. Sistem najlakše rešavamo najobičnijom eliminacijom: ako iz prve jednačine izrazimo

$$y = \frac{1-kx}{3}$$

i to uvrstimo u drugu, imamo

$$x + (k-1)\frac{1-kx}{3} = 4, \quad \left(3+k-k^2\right)x = 13-k, \quad x = \frac{13-k}{3+k-k^2}$$

(usput je neophodno prokomentarisati kako ova jednačina po x nema rešenja za $3+k-k^2=0$, odnosno $k_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$ s obzirom na to da je tada $13-k \neq 0$) i onda

$$y = \frac{1-kx}{3} = \frac{3-12k}{3\left(3+k-k^2\right)} = \frac{1-4k}{3+k-k^2}$$

Dati sistem se sastoji od 3 jednačine u 2 nepoznate, tj. ima više jednačina nego nepoznatih. Kako je sistem od 2 nepoznate u opštem slučaju odredjen dvema jednačina, sistem poput ovog može biti salglasan samo ako treća jednačina uklapa prve dve, tj. ako je vrednost k takva da se dobijena rešenja po x i y ukpalaju u 3. jednačinu:

$$2\frac{13-k}{3+k-k^2} - \frac{1-4k}{3+k-k^2} = 5$$
$$\frac{25+2k}{3+k-k^2} = 5, \quad 5k^2-3k+10=0.$$

Dobijena kvadratna jednačina po k nema rešenja $\left(D = 3^2 - 4\cdot 5\cdot 10 < 0\right)$, dakle realan parametar k sa traženim svojstvom ne postoji.

U 2. grupi su samo zamenjena mesta 2. i 3. jednačini i k je zamenjeno sa $k+1$. Odgovor je, naravno, isti - takvo k ne postoji.

2. Prava određena tačkom $P(1,2,-1)$ i vektorom $\vec{p} = (0,-3,2)$ odnosno $\Pi = \langle P, \vec{p}\rangle$ ima parametarski oblik:

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 2 - 3t \\ z &= -1 + 2t \end{aligned}$$

a)

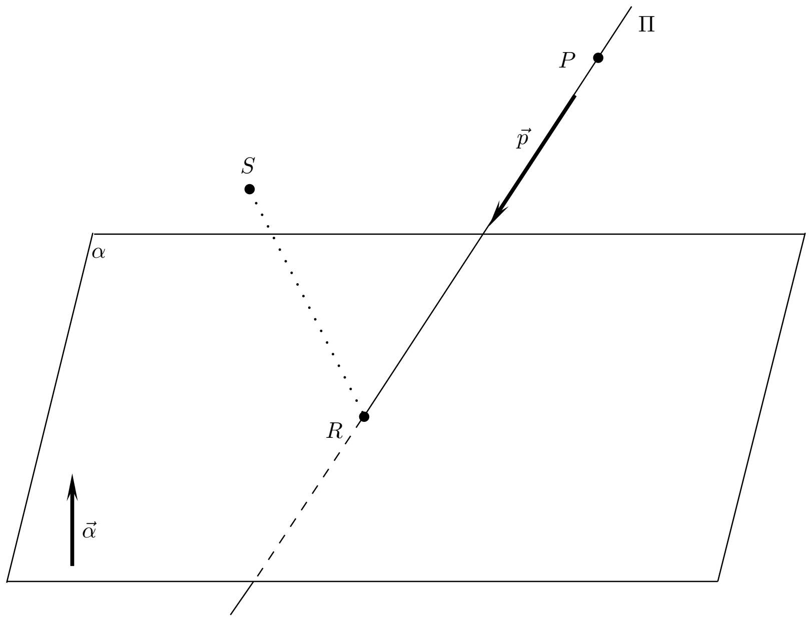
Kako je vektor normale date ravni $\vec{\alpha} = (5, -1, -2)$, iz $\vec{\alpha} \cdot \vec{p} = -1 \neq 0$, zaključujemo da postoji presek:

$$\alpha \cap \Pi = \{R\} \Rightarrow 5\,(1) - (2 - 3t) - 2\,(-1 + 2t) = 2 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow R\,(1, -7, 5)$$

Rastojanje se nalazi poznatom formulom:

$$SR = \sqrt{(1-0)^2 + (-7+2)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{42}$$

Slika koja sledi pokazuje odnos između tačaka i ravni, uz napomenu da tačka S ne pripada ravni α što se vidi unošenjem koordinata tačke S u jednačinu ravni α. b)



Slika 1: Rastojanje između tačaka R i S.

Tačka S ne pripada pravoj p, jer joj prva koordinata nije 0. Jednačinu ravni β jednostavno dobijamo jer $\beta = \langle S, \vec{\beta} \rangle$, gde je $\vec{\beta} = \vec{p} \times \overrightarrow{SR}$. Kako je $\overrightarrow{SR} = (1, -5, 4)$ sledi:

$$\vec{\beta} = \vec{p} \times \overrightarrow{SR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & -5 & 4 \end{vmatrix} = (-2, 2, 3)$$

Jednačina ravni β jednaka je:

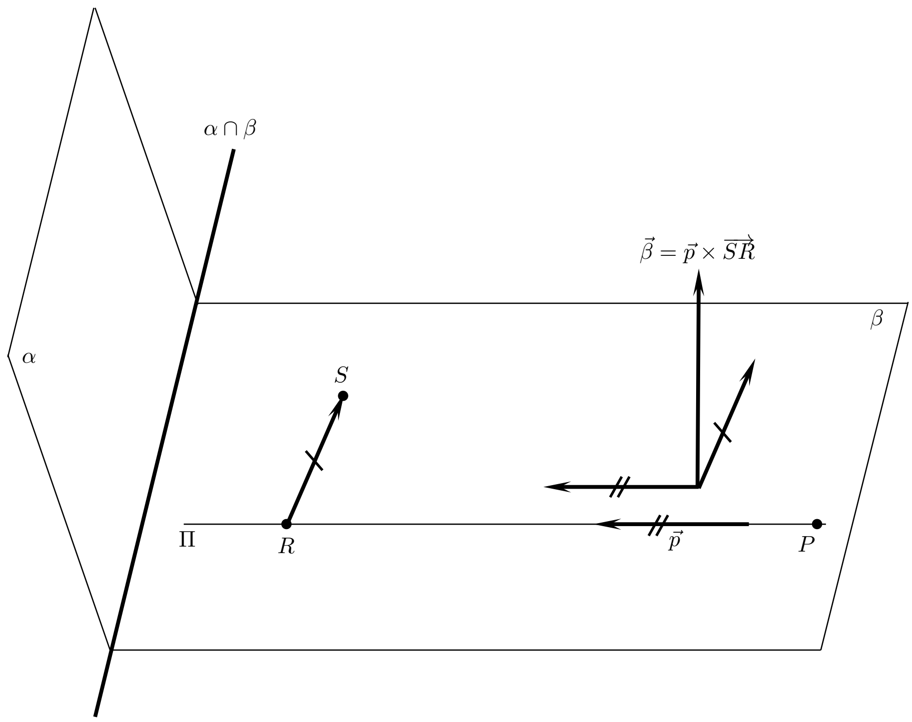
$$-2\,(x - 0) + 2\,(y + 2) + 3\,(z - 1) = 0 \Rightarrow -2x + 2y + 3z + 1 = 0$$

Ravni α i β se seku jer im vektori nisu kolinearni.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x & - & \boxed{y} & - & 2z & = & 2 \\ -2x & + & 2y & + & 3z & = & -1 \end{array} \Rightarrow 8x - z = 3$$

Ako je $x = t$ sledi da je $z = -3 + 8t$ i $y = 4 - 11t$, odnosno presečna prava ima jednačinu:

$$\begin{array}{rcrr} x & = & & t \\ y & = & 4 & -11t \\ z & = & -3 & +8t \end{array} \Rightarrow \frac{x-0}{1} = \frac{y-4}{-11} = \frac{z+3}{8}$$



Slika 2: Presečna prava je dobijena rešavanjem sistema čije su jednačine jednačine ravni α i β.

U 2. grupi su samo zamenjena mesta x i z-koordinatama.

3. Domen date funkcije predstavljaju oni i samo oni realni brojevi x za koje je $x^3(1 - x^3) > 0$, $0 < x^3 < 1$, odnosno $x \in (0, 1)$.

   Nule funkcija bi bili oni realni brojevi x za koje je $x^3(1 - x^3) > 1$, odnosno nakom smene $t = x^3$: $t(1 - t) = 1$, $t^2 - t + 1 = 0$, što predstavlja kvadratnu jednačinu bez realnih rešenja, pa stoga data funkcija nema nula. Kako se za sve x iz domena vrednost $x^3(1 - x^3)$ nalazi izmedju 0 i 1 (proizvod dva realna broja koji pripadaju intervalu $(0, 1)$), to je vrednost date funkcije, kao logaritam potonjeg izraza, uvek strogo manja od 0.

   S obzirom na to da je domen ograničen interval brojevne prave, funkcija nema ni horizontalnih ni kosih asimptota. Kandidati za eventualne vertikalne asimptote su krajevi domena.

0 i 1. Kako je

$$\lim_{x\to 0+} x^3\left(1-x^3\right) = \lim_{x\to 1-} x^3\left(1-x^3\right) = 0,$$

pri čemu u oba slučaja dati izraz teži nuli s desne strane, to je

$$\lim_{x\to 0+} \ln\left(x^3\left(1-x^3\right)\right) = \lim_{x\to 1-} \ln\left(x^3\left(1-x^3\right)\right) = \lim_{t\to 0+} \ln t = -\infty,$$

funkcija ima dve vertikalne asimptote - pravu $x=0$ i pravu $x=1$.

Prvi izvod jednak je

$$f'(x) = \frac{1}{x^3\left(1-x^3\right)}\left[x^3(1-x^3)\right]' = \frac{1}{x^3\left(1-x^3\right)}\left(3x^2-6x^5\right) = \frac{3(1-2x^3)}{x\left(1-x^3\right)}.$$

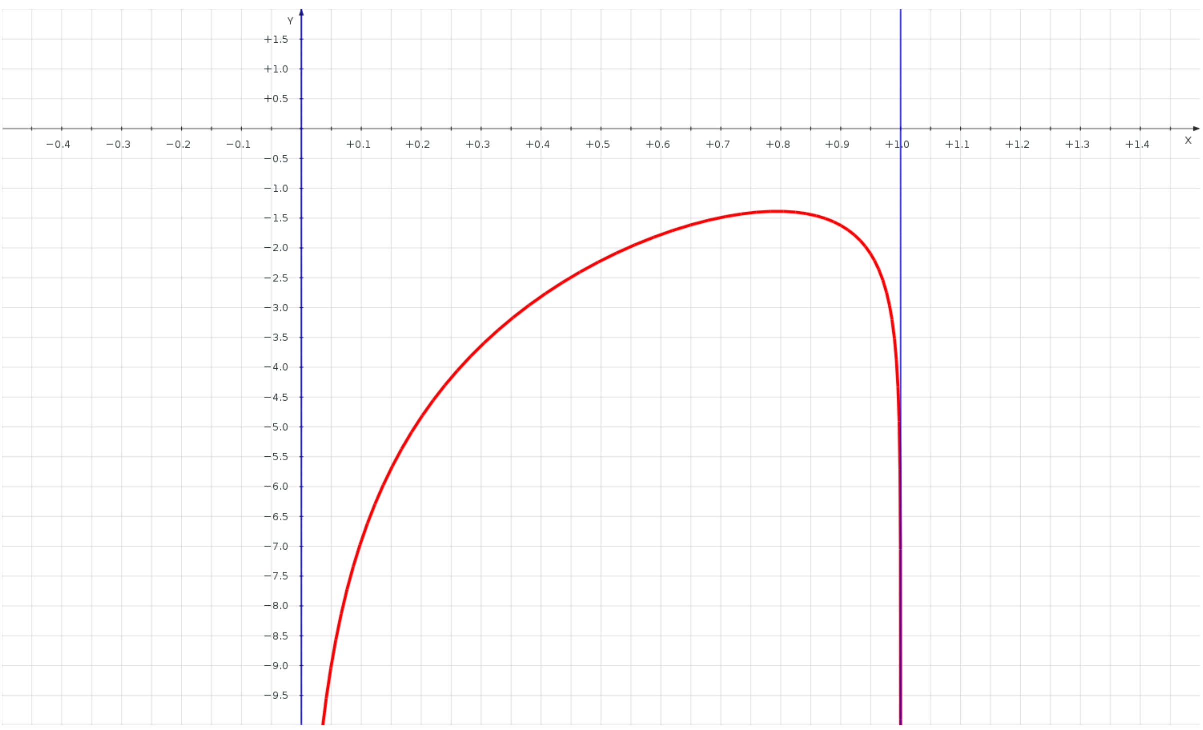
S obzirom na domen, izraz $f'(x)$ je negativan/jednak 0/pozitivan onda i samo onda kada je izraz $1-2x^3$ negativan/jednak 0/pozitivan, odnosno onda i samo onda kada je izraz $2x^3$ veći od 1/jednak 1/manji od 1. Drugim rečima

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow x\in\left(0,\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right), \quad f'(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}},1\right)$$

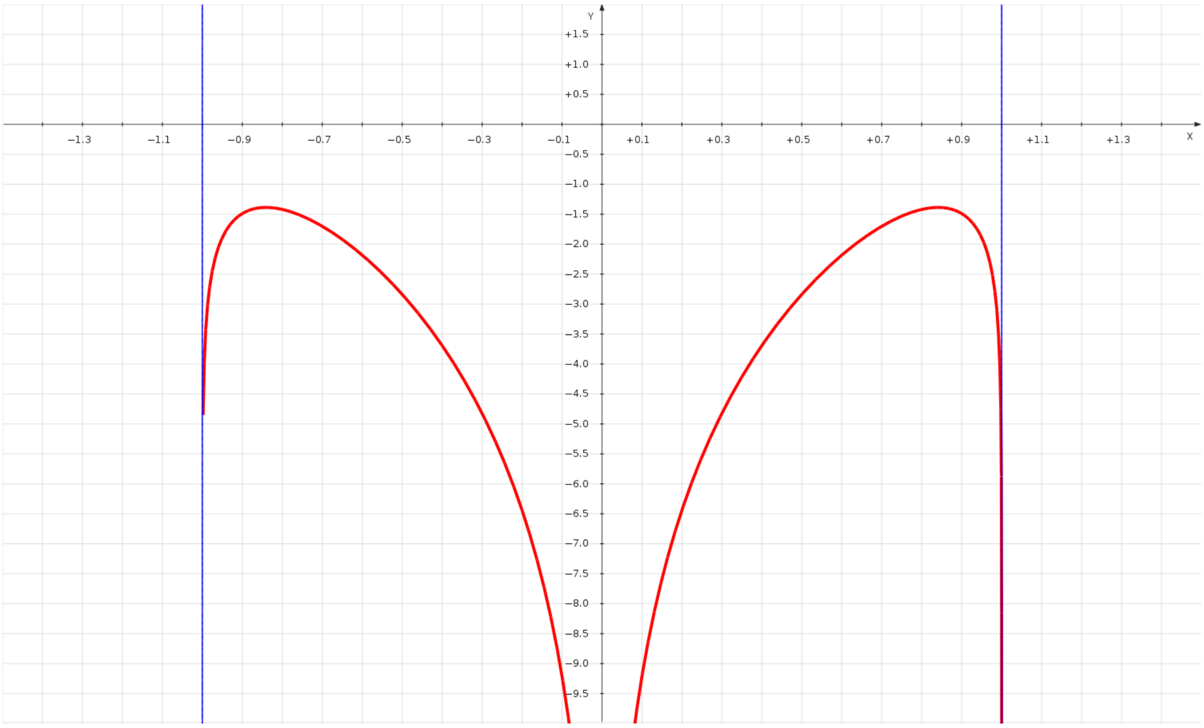
što znači da se u $x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ dostiže lokalni maksimum (jasno je da ova vrednost jeste u domenu). Drugi izvod,

$$f''(x) = \frac{3\left(-6x^2\right)\left(x-x^4\right) - 3\left(1-2x^3\right)\left(1-4x^3\right)}{x^2\left(1-x^3\right)^2} = \frac{-1-2x^6}{x^2\left(1-x^3\right)^2},$$

je, s obzirom na domen, uvek negativan. Dakle, funkcija $f''(x)$ je uvek konkavna i nema prevoja.



U 2. grupi analiza teče potpuno analogno, pri čemu je jedina razlika u tome što su domen, a onda i grafik funkcijie, simetrični u odnosu na nulu, tj. u odnosu na $x-$osu i odgovarajuća funkcija je parna (u 1. grupi nije ni parna ni neparna).



4. a)

Hodograf vektor funkcije je:

$$\vec{r}(t) = \left(3x, 2\sin\frac{x}{3}, 2\cos\frac{x}{3}\right)$$

odakle sledi da je $D_{\vec{r}} = \mathbb{R}$. Za $t = 0$ dobijamo $\vec{r}(0) = M(0, 0, 2)$. Potrebne vektore dobijamo iz:

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{r}}(t) &= \left(3, \frac{2}{3}\cdot\cos\frac{x}{3}, -\frac{2}{3}\cdot\sin\frac{x}{3}\right) \Rightarrow \dot{\vec{r}}(0) = \left(3, \frac{2}{3}, 0\right) \sim (9, 2, 0) = \vec{\tau} \\
\ddot{\vec{r}}(t) &= \left(0, -\frac{2}{9}\cdot\sin\frac{x}{3}, -\frac{2}{9}\cdot\cos\frac{x}{3}\right) \Rightarrow \ddot{\vec{r}}(0) = \left(0, 0, -\frac{2}{9}\right) \sim (0, 0, -1) = \vec{n} \\
\dot{\vec{r}}(0)\times\ddot{\vec{r}}(0) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{9} \end{vmatrix} = \left(-\frac{4}{27}, \frac{2}{3}, 0\right) = (-2, 9, 0) = \vec{b}
\end{aligned}$$

Torzija je jednaka:

$$T(M) = \frac{\dot{\vec{r}}(0)\cdot\left(\ddot{\vec{r}}(0)\times\dddot{\vec{r}}(0)\right)}{|\,\dot{\vec{r}}(0)\times\ddot{\vec{r}}(0)\,|^2}$$

i izračunajmo prvo:

$$\dddot{\vec{r}}(t) = \left(0, -\frac{2}{27}\cdot\cos\frac{x}{3}, \frac{2}{27}\cdot\sin\frac{x}{3}\right) \Rightarrow \dddot{\vec{r}}(0) = \left(0, -\frac{2}{27}, 0\right)$$

i dobijamo:

$$\dot{\vec{r}}(0)\cdot\left(\ddot{\vec{r}}(0)\times\dddot{\vec{r}}(0)\right)=\dot{\vec{r}}(0)\cdot\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & -\dfrac{2}{9}\\ 0 & -\dfrac{2}{27} & 0\end{vmatrix}=\left(3,\frac{2}{3},0\right)\cdot\left(-\frac{4}{243},0,0\right)=-\frac{4}{81}$$

Izračunajmo još i:

$$\mid\dot{\vec{r}}(0)\times\ddot{\vec{r}}(0)\mid^2=\left(-\frac{4}{27}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+(0)^2=\frac{340}{729}$$

Konačno je:

$$T(M)=\frac{-\dfrac{4}{81}}{\dfrac{340}{729}}=-\frac{9}{85}$$

b)

Kako je $f(x)$ složena funkcija od funkcija $h(x)=\dfrac{1}{x^2}$ i $g(x)=\sqrt{1+x^4}$ dovoljno je razviti funkciju $g(x)$ u Maklorenov polinom 8 stepena jer je oblika:

$$(1+X)^\alpha=\sum_{i=0}^{n}\binom{\alpha}{i}X^i+\mathbf{R}_n$$

odakle se dobija:

$$g(x)=\binom{\frac{1}{2}}{0}+\binom{\frac{1}{2}}{1}x^4+\binom{\frac{1}{2}}{2}x^8=1+\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{8}x^8$$

Konačno je:

$$f(x)\approx\frac{1}{x^2}\cdot\left(1+\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{8}x^8\right)\approx\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^6\approx\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}x^2$$

Da bi postojao Maklorenov razvoj funkcije, ona pre svega (zajedno sa svojim izvodima) mora biti definisana u tački $x_0=0$, što sa ovom funkcijom definitivno nije slučaj. Dakle, zvaničan odgovor bi bio da Maklorenov razvoj date funkcije ne postoji (čim se pojavljuju negativni stepeni x-a, ne može se govoriti o Maklorenovom razvoju). Prilikom pregledanja radova studenata je bodovano svako pravilno računanje izvoda odgovarajućeg reda, kao i svaki komentar vezan za nedefinisanost istih.

Rešenje odgovarajućeg zadatka za 2. grupu teče potpuno analogno.

prof. dr Slobodan Radojević

doc. dr Aleksandar Pejčev