4. Скаларна и векторска поља

Скаларно поље је пресликавање које свакој тачки простора или дела простора (обично тродимензионалног) додељује скалар, тј. број. Другим речима, то је обична функција више (тачније, три) промењљивих.

Слично, *векторско поље* је пресликавање које свакој тачки простора или дела простора додељује вектор (обично у три димензије); дакле, то је векторска функција.

Како увести диференцијални рачун на оваквим пресликавањима?

Пре свега, имамо три просторне координате и могућу потребу за диференцирањем по свакој од њих. Уводимо *набла оператор* као вектор-оператор парцијалног диференцирања по свакој од три промењљиве:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

Градијент, ротор и дивергенција

У случају (диференцијабилног) скаларног поља U набла се природно примењује, дајући све информације о понашању функције у околини дате тачке које могу бити потребне. Тако дефинишемо *градијент* $\operatorname{grad} U$ скаларног поља U као

$$\operatorname{grad} U = \nabla U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right).$$

Градијент је векторско поље - свакој тачки M у простору додељен је вектор $\operatorname{grad} U(M)$.

Приметимо да је тотални диференцијал скаларног поља U једнак

$$dU = U'_x dx + U'_y dy + U'_z dz = \operatorname{grad} U \cdot (dx, dy, dz).$$

По аналогији са изводима, градијент задовољава следећа правила, што се лако проверава:

$$\operatorname{grad}(cU) = c \cdot \operatorname{grad} U, \qquad \operatorname{grad}(U \pm V) = \operatorname{grad} U \pm \operatorname{grad} V,$$
$$\operatorname{grad}(U \cdot V) = U \operatorname{grad} V + V \operatorname{grad} U, \qquad \operatorname{grad} \frac{U}{V} = \frac{V \operatorname{grad} U - U \operatorname{grad} V}{V^2}$$

за произвољна скаларна поља U и V и константу $c \in \mathbb{R}$.

Ако нам је познат градијент скаларног поља U у датој тачки M, може се одредити брзина раста поља U у смеру произвољног вектора $\vec{v}$. Наиме, ако је $\vec{v} = (x_v, y_v, z_v)$, поље U се може апроксимирати Тејлоровим полиномом у околини тачке M као

$$U(M + h\vec{v}) = U(M) + \frac{\partial U(M)}{\partial x} \cdot hx_v + \frac{\partial U(M)}{\partial y} \cdot hy_v + \frac{\partial U(M)}{\partial z} \cdot hz_v + o(h) = U(M) + h \operatorname{grad} U(M) \cdot \vec{v}.$$

Тако дефинишемо *извод у смеру вектора* $\vec{v}$:

$$\frac{\partial U(M)}{\partial \vec{v}} = \lim_{h \to 0} \frac{U(M + h\vec{v}) - U(M)}{h|\vec{v}|} = \operatorname{grad} U(M) \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}.$$

Овај извод је очито највећи у смеру градијента $\operatorname{grad} U$, тј. у том смеру поље U најбрже расте.

Пример 16. Дати су скаларно поље $U(x, y, z) = x^2 y + y^2 z$, тачка $A(1, 1, 1)$ и вектор $\vec{v} = (1, 2, -2)$.

Градијент поља U је једнак $\operatorname{grad} U = (2xy, x^2 + 2yz.y^2)$. У тачки A он је једнак $(2, 3, 1)$.

Извод поља U у правцу вектора $\vec{v}$ у тачки A је $\frac{\partial U(A)}{\partial \vec{v}} = \operatorname{grad} U(A) \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = (2, 3, 1) \cdot \frac{1}{3}(1, 2, -2) = 2$.

У случају векторског поља $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$, где су A_x, A_y, A_z диференцијабилне функције по x, y, z, ситуација је нешто другачија. Будући вектор, набла оператор се може "помножити" вектором $\vec{A}$ на два начина: скаларно и векторски. Тако уводимо појмове *дивергенције* $\operatorname{div}\vec{A}$ и *ротора* $\operatorname{rot}\vec{A}$:

$$\operatorname{div}\vec{A} = \nabla\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \nabla\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\, , \, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\, , \, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right).$$

Као што је уобичајено, са $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ и $\vec{k}$ означени су јединични вектори дуж координатних оса:

$$\vec{\imath} = (1,0,0), \quad \vec{\jmath} = (0,1,0), \quad \vec{k} = (0,0,1). \tag{14}$$

Дакле, дивергенција је број, а ротор је вектор.

Ако је U скаларно поље, правила производа би изгледала овако:

$$\operatorname{div}(U\cdot\vec{A}) = \nabla\cdot(U\cdot\vec{A}) = \nabla U\cdot\vec{A} + U(\nabla\cdot\vec{A}) = \operatorname{grad}U\cdot\vec{A} + U\cdot\operatorname{div}\vec{A},$$
$$\operatorname{rot}(U\cdot\vec{A}) = \nabla\times(U\cdot\vec{A}) = \nabla U\times\vec{A} + U(\nabla\times\vec{A}) = \operatorname{grad}U\times\vec{A} + U\cdot\operatorname{rot}\vec{A}.$$

Класификација векторских поља

Векторско поље $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ је:

- *хармонијско* ако је $\operatorname{div}\vec{A} = 0$ и $\operatorname{rot}\vec{A} = \vec{0}$ у свакој тачки;
- *потенцијално* ако је $\operatorname{rot}\vec{A} = \vec{0}$ у свакој тачки;
- *вртложно* ако је $\operatorname{div}\vec{A} = 0$ у свакој тачки;
- *сложено* ако је $\operatorname{div}\vec{A} \not\equiv 0$ и $\operatorname{rot}\vec{A} \not\equiv \vec{0}$.

Градијент ма ког скаларног поља U је потенцијално векторско поље. Заиста,

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad}U) = \left(\frac{\partial}{\partial y}U'_z - \frac{\partial}{\partial z}U'_y, \frac{\partial}{\partial z}U'_x - \frac{\partial}{\partial x}U'_z, \frac{\partial}{\partial x}U'_y - \frac{\partial}{\partial y}U'_x\right) = (0,0,0).$$

Испоставља се да важи и обратно тврђење:

- За свако потенцијално векторско поље $\vec{A}$ постоји скаларно поље U такво да је $\operatorname{grad}U = \vec{A}$. Поље U се назива *потенцијалом* векторског поља $\vec{A}$.

Потенцијал се може једноставно наћи поновљеном интеграцијом.

Пример 17. Класификовати векторско поље $\vec{A} = (2x+y+1, x+z+2, y+2z-1)$ и одредити његов потенцијал ако постоји.

Решење. Како је $\operatorname{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2x{+}y{+}1 & x{+}z{+}2 & y{+}2z{-}1 \end{vmatrix} = (1-1, 0-0, 1-1) = \vec{0}$, поље је потенцијално.

Пошто је $\operatorname{div}\vec{A} = \dfrac{\partial(2x+y+1)}{\partial x} + \dfrac{\partial(x+z+2)}{\partial y} + \dfrac{\partial(y+2z-1)}{\partial z} = 2+0+2 = 4$, оно није хармонијско.

Сада ћемо наћи потенцијал U.

- Пошто је $U'_x = 2x+y+1$, интеграцијом по dx добијамо $U = \int U'_x dx = x^2+xy+x+E(y,z)$. Приметимо да, мада је E константа по x, она може да зависи од y и z.
- Даље, како је $x+z+2 = U'_y = \frac{\partial}{\partial y}(x^2+xy+x+E(y,z)) = x+E'_y$, имамо $E'_y = z+2$ и, интеграцијом по dy, $E = yz+2y+D(z)$, те је $U = x^2+xy+yz+x+2y+D(z)$. Сада "константа" D зависи само од z.
- Најзад, како је $y+2z-1 = U'_z = \frac{\partial}{\partial z}(x^2+xy+yz+x+2y+D(z)) = y+D'(z)$, следи $D'(z) = 2z-1$ и одатле $D = z^2-z+C$ за неку "праву" константу C. Према томе, $U = x^2+xy+yz+z^2+x+2y-z+C$.

Векторске линије

Замислимо векторско поље $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ као поље ваздушне струје у простору у коме се налази честица. Ношена ваздушном струјом, честица се креће по некој путањи, при чему у тачки M њен вектор кретања (dx, dy, dz) има исти правац као $\vec{A}(M)$. Дакле, путања честице задовољава систем једначина у симетричном облику:

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z}.$$

Решења овог система називају се *векторске линије* векторског поља $\vec{A}$.

Пример 18. Одредити векторску линију векторског поља $\vec{A} = (xy, -x^2, yz + z)$ која пролази кроз тачку $M(4, 3, 2)$.

Решење. Треба решити систем $\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{-x^2} = \frac{dz}{yz}$ уз почетне услове $(x, y, z) = (4, 3, 2)$. Из прве једнакости имамо $\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x}$, тј. $xdx = -ydy$, па интеграцијом следи $x^2 + y^2 = C_1$. Из припадности тачке M следи $C_1 = 25$.

Заменом $y = \sqrt{25 - x^2}$ у једнакости $\frac{dz}{dx} = \frac{yz+z}{xy}$ добијамо једначину са раздвојеним променљивим $\frac{dx}{x} + \frac{dx}{x\sqrt{25-x^2}} = \frac{dz}{z}$. Интеграција даје $\frac{6}{5}\ln|x| - \frac{1}{5}\ln(5 + \sqrt{25 - x^2}) = \ln|z| + \text{const}$, дакле, $z^5(y + 5) = C_2 x^6$. Из припадности тачке M следи $C_2 = \frac{1}{16}$.

Решење је крива дата условима $x^2 + y^2 = 25$ и $x^6 = 16z^5(y + 5)$.

Задаци

1. Класификовати векторско поље $\vec{A} = (e^x y + e^z, e^y z + e^x, e^z x + e^y)$. Одредити извод његовог потенцијала U у тачки $M(-1, 1, 0)$ у правцу вектора $\vec{v} = (2, 2, -1)$, ако тај потенцијал постоји.

Решење. Имамо $\operatorname{rot}\vec{A} = \vec{0}$, па је ово потенцијално поље. Његов потенцијал U тада постоји и важи $\operatorname{grad} U = \vec{A}$. Одмах знамо и извод U у правцу вектора $\vec{v}$: он је $\frac{\partial U(M)}{\partial \vec{v}} = \operatorname{grad} U(M) \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \vec{A}(M) \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = (\frac{1}{e} + 1, \frac{1}{e}, e - 1) \cdot \frac{1}{3}(2, 2, -1) = \frac{1}{3}(3 - e + \frac{4}{e})$.

Потенцијал је $U = e^x y + e^y z + e^z x + C$, али њега није било неопходно наћи.

2. Израчунати дивергенцију и ротор векторског поља $\overrightarrow{A} = e^{z-y}(y, x - xy - 1, xy + 1)$ у тачки $P(2, 1, 1)$. Одредити потенцијал поља $\overrightarrow{A}$ ако постоји.

Решење. Овде је $\operatorname{div}\vec{A} = 2(xy - x + 1)e^{z-y}$ и $\operatorname{rot}\vec{A} \equiv \vec{0}$. Дакле, поље $\vec{A}$ је потенцијално. У тачки P је $\operatorname{div}\vec{A}(P) = 2$.

Потенцијал U задовољава $U'_x = e^{z-y}y$, одакле је $U = xye^{z-y} + C(y, z)$. Даље, из $U'_y = (x - xy)e^{z-y} + C'_y(y, z)$ следи да је $C'_y(y, z) = -e^{z-y}$, тј. $C = e^{z-y} + D(z)$. Најзад, из $U'_z = (xy + 1)e^{z-y} + D'(z)$ следи $D' = 0$, тј. $D = \text{const}$. Дакле, $U = (xy + 1)e^{z-y} + \text{const}$.

3. Дато је векторско поље $\vec{A} = (2x + ay + 3z)\vec{\imath} + (-2y + bz)\vec{\jmath} + (cx + y + 4z)\vec{k}$, где су a, b и c реални параметри. Наћи вредности a, b, c за које је поље $\vec{A}$ потенцијално и одредити његов потенцијал.

Решење. Ротор датог поља је $\vec{A} = (1 - b, 3 - c, -a)$, што је нула-вектор за $(a, b, c) = (0, 1, 3)$ и тада је $\vec{A} = (2x + 3z, z - 2y, 3x + y + 4z)$ потенцијално поље.

Његов потенцијал U задовољава $U'_x = 2x + 3z$, дакле $U = \int(2x + 3z)dz = x^2 + 3xz + E(y, z)$. Даље, $z - 2y = U'_y = E'_y$, па је $E = zy - y^2 + D(z)$ и $U = x^2 + 3xz - y^2 + yz + D(z)$. Најзад, $3x + y + 4z = U'_z = 3z + y + D'(z)$, па је $D = 2z^2 + C$ и $U = x^2 + 3xz - y^2 + yz + 2z^2 + C$.

4. Класификовати векторско поље $\vec{A} = (x + y + z)^\alpha \Big((y + 2z)\vec{\imath} + (z - x)\vec{\jmath} - (2x + y)\vec{k}\Big)$ у зависности од параметра α. Одредити његов потенцијал за ону вредност α за коју он постоји.

Решење. Имамо $\operatorname{div}\vec{A} = 3\alpha(z - x)(x + y + z)^{\alpha-1}$, што је нула само за $\alpha = 0$, и $\operatorname{rot}\vec{A} = (\alpha + 2)(x + y + z)^\alpha(-1, 2, -1)$, што је нула само за $\alpha = -2$. Поље је потенцијално за $\alpha = -2$, вртложно за $\alpha = 0$ и сложено у осталим случајевима.

За $\alpha = -2$ постоји потенцијал U и важи $U'_x = \frac{y+2z}{(x+y+z)^2}$, $U'_y = \frac{z-x}{(x+y+z)^2}$ и $U'_z = -\frac{2x+y}{(x+y+z)^2}$. Из прве једнакости следи $U = \frac{y+2z}{(x+y+z)^2}dx = -\frac{y+2z}{x+y+z} + C(y, z)$, а одатле диференцирањем по y и z следи из $C'_y = C'_z = 0$, тј. C је константа и $U = -\frac{y+2z}{x+y+z}$.

5. Наћи векторске линије векторског поља $\vec{A} = (-y^2, x^2 - 2xy, y^2 z)$.

Решење. Треба решити систем $\frac{dx}{-y^2} = \frac{dy}{x^2-2xy} = \frac{dz}{y^2 z}$. Имамо $\frac{dx}{-y^2} = \frac{dz}{y^2 z}$, тј. $dx = \frac{dz}{z}$, одакле следи $x = \ln|z| + \text{const}$, дакле $e^x = C_1 z$.

Даље, из прве једнакости следи $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy-x^2}{y^2}$, што је хомогена једначина и решава се сменом $y = xu$ и $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$. Тада је $u + x\frac{du}{dx} = \frac{2u-1}{u^2}$, тј. $\frac{u^2 du}{u^3-2u+1} = -\frac{dx}{x}$. Интеграцијом се добија $-\ln x = \ln|u-1| + \frac{1}{\sqrt{5}} \ln\left|\frac{2u+1+\sqrt{5}}{2u+1-\sqrt{5}}\right| + \text{const}$, што се враћањем $u = \frac{y}{x}$ своди на $\frac{2y+(1+\sqrt{5})x}{2y+(1-\sqrt{5})x} \cdot |y-x|^{\sqrt{5}} = C_2$.

6. Дато је векторско поље $\vec{A} = 2z\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + (y+2x)\vec{k}$. Наћи дивергенцију и ротор поља $\vec{A}$ у тачки $P(0,1,3)$. Одредити векторску линију која пролази кроз тачку P.

Решење. Имамо $\operatorname{div} \vec{A} = 1$, $\operatorname{rot} \vec{A} = (1,0,0) = \vec{\imath}$; оба су константна.

Векторске линије: ако је $\frac{dx}{2z} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{y+2x}$, онда је $\frac{dy}{y} = \frac{dx+dy+dz}{2z+y+(y+2x)} = \frac{d(x+y+z)}{2(x+y+z)}$, и интеграцијом $\ln y = \frac{1}{2}\ln(x+y+z)$. Одавде је $C_1 = \frac{x+y+z}{y^2}$, тј. $z = C_1 y^2 - x - y$. Вратимо то у полазни систем: $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{2z} = \frac{dx}{2(C_1 y^2 - x - y)}$, тј. $\frac{dx}{dy} = \frac{2(C_1 y^2 - x - y)}{y} = 2C_1 y - 2 - \frac{2x}{y}$, што је линеарна диференцијална једначина по x као функцији по y: $x' + \frac{2}{y}x = 2C_1 y - 2$. Решење је $x = \frac{C_2}{y^2} + \frac{1}{2}C_1 y^2 - \frac{2}{3}y$, тј. $y^2(3x + y - 3z) = 6C_2$.

Заменом $(x,y,z) = (0,1,3)$ налазимо $C_1 = 4$ и $C_2 = -\frac{4}{3}$, па је тражена векторска линија дата једначинама $x + y + z = 4y^2$ и $y^2(3x + y - 3z) = -8$.

7. Дато је векторско поље $\vec{A} = (x^2-1)\vec{\imath} + (1-y^2)\vec{\jmath} + (x-y)\vec{k}$. Наћи дивергенцију и ротор поља $\vec{A}$ у тачки $(2,3,0)$. Одредити његове векторске линије.

Решење. Дивергенција је $\operatorname{div}\vec{A} = 2x - 2y = -2$, а ротор $\operatorname{rot}\vec{A} = (-1-0)\vec{\imath} + (0-1)\vec{\jmath} + (0-0)\vec{k} = (-1,-1,0)$.

Векторске линије налазимо из система $\frac{dx}{x^2-1} = \frac{dy}{1-y^2} = \frac{dz}{x-y} = dt$. Из прве једнакости добијамо једначину са раздвојеним променљивим чије је решење $\ln|\frac{x-1}{x+1}| + \ln|\frac{y-1}{y+1}| = \text{const}$, што значи $\frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{y-1}{y+1} = C_1$, тј. $(x-1)(y-1) = C_1(x+1)(y+1)$.

Такође, из $dz = (x-y)dt$ и $dx + dy = (x^2 - y^2)dt = (x+y)dz$ следи $dz = \frac{d(x+y)}{x+y}$, одакле је интеграцијом $z = \ln|x+y| + \text{const}$, тј. $x + y = C_2 e^z$.