5. Криволинијски интеграли

Подсетимо се како смо увели одређени интеграл функције $f(x)$ на сегменту $[a,b]$.

Посматрајмо поделу сегмента $[a,b]$ подеоним тачкама $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$ на подинтервале и у сваком подинтервалу $[x_{i-1}, x_i]$ одаберимо тачку a_i. За дату поделу, са δ означавамо највећу од разлика $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ за $i = 1, \dots, n$.

- Интегрална сума је сума $S = \sum_{i=1}^{n} f(a_i) \cdot \Delta x_i$.
- Интеграл $\int_a^b f\,dx$ је лимес интегралне суме S када подела тежи најфинијој могућој, тј. када $\delta \to 0$.

Аналогним поступком бисмо могли да дефинишемо интеграл функције $f : \Phi \to \mathbb{R}$ по било ком мерљивом објекту Φ. Заиста, тај поступак ћемо понављати више пута. Сасвим неформално, интегрална сума је сума вредности функције у неким "истакнутим" тачкама помножених одговарајућих тежинама, а интеграл је лимес интегралне суме. Дакле, интеграл је сума вредности функције у "свим" тачкама, где је свака вредност помножена одговарајућом тежином.

Дакле, у овој глави објекат Φ је крива Γ задата параметарски:

$$\Gamma : \ \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad \text{за} \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta. \tag{15}$$

Подразумевамо да је крива *глатка*, тј. да су функције $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ непрекидно диференцијабилне (скоро свуда). То је готово увек случај.

Подела Π интервала $[a,b]$ на подинтервале $[t_{i-1}, t_i]$ за $i = 1, 2, \dots, n$, где су

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b, \tag{16}$$

одређује поделу криве Γ на лукове Γ_i (од тачке $\vec{r}(t_{i-1})$ до тачке $\vec{r}(t_i)$). *Финоћа поделе* δ је највећа од дужина подинтервала $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$.

На сваком од подинтервала $[t_{i-1}, t_i]$ одабрана је *истакнута тачка* c_i, чиме су одређне и истакнуте тачке $M_i = \vec{r}(c_i)$ на луку криве Γ_i.

Криволинијски интеграл прве врсте

Посматрајмо криву Γ задату једначином (15) и њену поделу Π задату са (16). Нека је f функција дефинисана у тачкама криве.

Означимо са $\Delta\Gamma_i$ дужину дела Γ_i и уведимо интегралну суму изразом

$$S = S(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot \Delta\Gamma_i.$$

Интеграл $I = \displaystyle\int_\Gamma f\,ds$ је лимес интегралне суме S када подела Π тежи најфинијој могућој, тј. када $\delta = \max_i \Delta t_i$ тежи нули. При томе ds представља диференцијал дужине криве.

Пошто дужину $\Delta\Gamma_i$ можемо да апроксимирамо дужином дужи $M_{i-1}M_i$:

$$\Delta\Gamma_i \approx M_{i-1}M_i = |\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})| \approx (t_i - t_{i-1})|\dot{\vec{r}}(t_i)| = \sqrt{x'(t_i)^2 + y'(t_i)^2 + z'(t_i)^2} \cdot \Delta t_i,$$

пуштањем $\Delta t_i \to 0$ следи да је

$$ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} \cdot dt.$$

Према томе:

$$I = \int_\Gamma f\,ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt.$$

Дужина ℓ криве Γ се, наравно, може израчунати као интеграл јединице по кривој:

- $\ell = \displaystyle\int_\Gamma 1\,ds = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt.$

У специјалном случају када је крива Γ задата у равни једначином $y = y(x)$ за $a \leqslant x \leqslant b$, улогу параметра t може да преузме x. Тада имамо $ds = \sqrt{1 + y'(x)^2} \cdot dx$ и

$$I = \int_\Gamma f(x,y)ds = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'(x)^2}\,dx.$$

Пример 19. Ако је Γ кружница дата једначином $x^2 + y^2 = 2x$, израчунати $\displaystyle\int_\Gamma \sqrt{x}\,ds$.

Решење. Дата кружница има једначину $(x-1)^2 + y^2 = 1$, тј. има центар $A(1,0)$ и полупречник $r = 1$, па се може параметризовати поларним координатама: $x - 1 = \cos t$ и $y = \sin t$, $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$.

Сада је $x'(t) = -\sin t$, $y'(t) = \cos t$ и $ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\,dt = dt$, па имамо $\int_\Gamma \sqrt{x}\,ds = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1+\cos t}\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2\cos^2 \frac{t}{2}}\,dt = \sqrt{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos\frac{t}{2}\,dt = \sqrt{2}\cdot 2\sin\frac{t}{2}|_{-\pi}^{\pi} = 4\sqrt{2}$.

Криволинијски интеграл друге врсте

Поново посматрамо криву Γ задату са (15) и њену поделу Π задату са (16). Нека је сада $\vec{A} = (P,Q,R)$ векторско поље дефинисано у тачкама криве.

Извод векторске функције $\dot{\vec{r}}(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ са базним векторима $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ и $\vec{k}$ (14) редом чини углове $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и $\gamma(t)$ такве да је

$$\cos\alpha(t) = \frac{\dot{\vec{r}}(t)\cdot\vec{\imath}}{|\dot{\vec{r}}(t)|} = \frac{x'(t)}{|\dot{\vec{r}}(t)|}, \qquad \cos\beta(t) = \frac{\dot{\vec{r}}(t)\cdot\vec{\jmath}}{|\dot{\vec{r}}(t)|} = \frac{y'(t)}{|\dot{\vec{r}}(t)|}, \qquad \cos\gamma(t) = \frac{\dot{\vec{r}}(t)\cdot\vec{k}}{|\dot{\vec{r}}(t)|} = \frac{z'(t)}{|\dot{\vec{r}}(t)|}.$$

Означимо сада са $\Delta x_i = x(t_i) - x(t_{i-1})$ промену x-координате на делу Γ_i. Интегрална сума је

$$S = S(\Pi) = \sum_{i=1}^n P(M_i)\cdot\Delta x_i.$$

Лимес интегралне суме S када подела Π тежи најфинијој могућој, тј. када $\delta = \max_i \Delta t_i$ тежи нули, је интеграл $I_1 = \displaystyle\int_\Gamma P\,dx$. Аналогно се уводе и интеграли $I_2 = \displaystyle\int_\Gamma Q\,dy$ и $I_3 = \displaystyle\int_\Gamma R\,dz$, а сабирање сва три интеграла даје нам општи криволинијски интеграл друге врсте:

$$I = \int_\Gamma \vec{A}\cdot\vec{ds} = \int_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz, \tag{17}$$

где је $\vec{ds} = (dx, dy, dz)$ вектор-диференцијал. Интеграл (17) се зове и *рад* векторског поља $\vec{A}$ дуж (оријентисане) криве Γ. У случају када је крива затворена, често се каже *циркулација* и користи се ознака $\displaystyle\oint \vec{A}\cdot\vec{ds}$.

Пошто је $\Delta x_i \approx \Delta t_i \cdot x'(t_i) \approx \Delta\Gamma_i \cos\alpha(t_i)$, пуштањем $\Delta x_i \to 0$ следи

$$dx = x'(t)\cdot dt = ds\cdot\cos\alpha(t). \tag{18}$$

Тако добијамо везе између криволинијских интеграла прве и друге врсте и једноструких интеграла:

$$\begin{aligned} I = \int_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz &= \int_a^b [P(t)x'(t) + Q(t)y'(t) + R(t)z'(t)]dt \\ &= \int_\Gamma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds. \end{aligned} \tag{19}$$

Приметимо да је у случају интеграла друге врсте *оријентација* криве, тј. смер кретања дуж криве (тако да параметар t расте или опада), важна. Ако крива промени оријентацију, све величине Δx_i мењају знак, па тако и вредност интеграла мења знак. Ово код интеграла прве врсте није био случај - наиме, $\Delta\Gamma_i$ је увек било позитивно.

Пример 20. Дате су константе $a, b > 0$. Крива Γ је лук криве дате једначином $y^a = x^b$ од тачке $A(0,0)$ до тачке $B(1,1)$. Израчунати $I = \displaystyle\int_\Gamma xdy + ydx$.

Решење. Криву можемо параметризовати једначинама $x = t^a$ и $y = t^b$ за $0 \leqslant t \leqslant 1$. Тада имамо $dx = at^{a-1}dt$, $dy = bt^{b-1}dt$ и $I = \int_0^1 (t^a\cdot bt^{b-1} + t^b\cdot at^{a-1})dt = \int_a^b (a+b)t^{a+b-1}dt = (a+b)\cdot\frac{1}{a+b} = 1$. Ова вредност не зависи од a и b.

Постоје криволинијски интеграли 2. врсте који не зависе од пута Γ, већ само од тачака A и B, и овај је баш такав. Ова независност од пута важи само под одређеним условима.

Пример 21. Наћи интеграл $I = \oint (y^2 - z)dx - x\,dy$ дуж затворене криве дате условима $x^2 + 4y^2 = 4$ и $x + y + z = 2$, оријентисане у смеру казаљке на сату.

Решење. Користимо параметризацију $x = 2\cos t$, $y = \sin t$ и $z = 2 - 2\cos t - \sin t$, али због оријентације криве (у негативном смеру) параметар t се креће од 2π до 0.

Како је $dx = -2\sin t\,dt$ и $dy = \cos t\,dt$, имамо $I = \int_{2\pi}^{0} [(\cos^2 t + 2\cos t + \sin t - 2) \cdot (-2\sin t) - 2\cos t \cdot \cos t]dt = -\int_0^{2\pi} [-2(\cos^2 t + 2\cos t - 2)\sin t - 2\sin^2 t - 2\cos^2 t]dt = 2\int_0^{2\pi} (\cos^2 t + 2\cos t - 2)\sin t + 2\int_0^{2\pi} dt$. Најзад, сменом $\left|{}^{y=\cos t}_{dy=-\sin t\,dt}\right|$ добијамо $I = -2\int_1^1 (y^2 + 2y - 2)dy + 4\pi = 4\pi$.

Задаци

1. Крива γ је дата параметарски: $(x, y) = (4\sin t, t - \sin t\cos t)$ за $0 \leqslant t \leqslant \pi$. Израчунати интеграл $I = \displaystyle\int_\gamma x\,ds$.

Решење. Како је $x' = 4\cos t$ и $y' = 2 - 2\cos^2 t$, имамо $ds = \sqrt{16\cos^2 t + (2 - 2\cos t)^2}dt = 2(1 + \cos t)dt$. Добијамо $I = 8\int_0^\pi \sin t(1 + \cos t)dt = \left\|{}^{u=1+\cos t}_{du=-\sin t\,dt}\right\| = 8\int_0^2 u\,du = 16$.

2. Израчунати интеграл $\displaystyle\int_s \sqrt{4 - x}\,ds$, где је s дуж AB с крајевима $A(3, 2, 0)$ и $B(0, 1, 1)$.

Решење. Прво параметризујемо дуж AB: она је дата једначином $(x, y, z) = A + t \cdot \overrightarrow{AB} = (3, 2, 0) + t(-3, -1, 1) = (3 - 3t, 2 - t, t)$. Сада је $ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt = \sqrt{11}\,dt$ и $\sqrt{4 - x} = \sqrt{1 + 3t}$, па је тражени интеграл $I = \int_0^1 \sqrt{1 + 3t}\sqrt{11}\,dt = \left\|{}^{u=1+3t}_{du=3dt}\right\| = \frac{\sqrt{11}}{3}\int_1^4 u^{1/2}du = \frac{\sqrt{11}}{3} \cdot \frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_{u=1}^{u=4} = \frac{14\sqrt{11}}{9}$.

3. Крива γ је пресек површи $y^2 + z^2 = 2xz$ и $\ln\frac{z}{2} = 1 + \frac{y}{z}$ оивичен равнима $z = 2$ и $z = 2e$. Одредити интеграл $\displaystyle\int_\gamma \frac{ds}{x + y + z}$.

Решење. Да бисмо параметризовали криву, означићемо $1 + \frac{y}{z} = t$. Из друге једначине следи $z = 2e^t$ и одатле $y = 2(t - 1)e^t$, а онда прва једначина даје $x = (t^2 - 2t + 2)e^t$. Следи $x' = t^2e^t$, $y' = 2te^t$, $z' = 2e^t$ и према томе $ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt = e^t\sqrt{t^4 + 4t^2 + 4}\,dt = (t^2 + 2)e^t\,dt$.

Најзад, услов $2 \leqslant z \leqslant 2e$ се своди на $0 \leqslant t \leqslant 1$, па добијамо $I = \int_0^1 dt = 1$.

4. Наћи интеграл $I = \displaystyle\int_\gamma z\,ds$, где је γ крива у пресеку полусфере $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geqslant 0$ и цилиндра $x^2 + y^2 = 2x$.

Решење. Прво параметризујемо криву. Дати цилиндар има једначину $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, па њега параметризујемо поларним координатама: $x = 1 + \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$. Из једначине полусфере добијамо $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} = \sqrt{2 - 2\cos\varphi} = 2\sin\frac{\varphi}{2}$.

Имамо $ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}dt = \sqrt{1 + \cos^2\frac{\varphi}{2}}$, па следи $I = 2\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos^2\frac{\varphi}{2}} \cdot \sin\frac{\varphi}{2}d\varphi = \left\|{}^{t=-\cos\frac{\varphi}{2}}_{dt=\frac{1}{2}\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi}\right\| = 4\int_{-1}^1 \sqrt{1 + t^2}dt = 4 \cdot \frac{1}{2}[t\sqrt{t^2 + 1} + \ln(t + \sqrt{t^2 + 1})]\Big|_0^1 = 4\sqrt{2} + 4\ln(1 + \sqrt{2})$.

5. Израчунати интеграл $\displaystyle\int_\gamma \sqrt{12z - 2z^2 - 3}\,ds$, где је γ крива у пресеку површи $z = x^2 + y^2$ и равни $x + y + z = 2$.

Решење. Тачке на кривој γ задовољавају једначину $x^2 + y^2 + x + y - 2 = 0$, тј. $(x + \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{2}$, па криву можемо да параметризујемо поларним координатама: $x = \frac{\sqrt{10}}{2}\cos\varphi - \frac{1}{2}$, $y = \frac{\sqrt{10}}{2}\sin\varphi - \frac{1}{2}$ и $z = 3 - \frac{\sqrt{10}}{2}(\sin\varphi + \cos\varphi)$. Сада је $ds = \sqrt{x_\varphi^2 + y_\varphi^2 + z_\varphi^2}\,d\varphi = \sqrt{5(1 - \sin\varphi\cos\varphi)}\,d\varphi$. Такође је $\sqrt{-2z^2 + 12z - 3} = \sqrt{15 - 2(z - 3)^2} = \sqrt{10(1 - \sin\varphi\cos\varphi)}$, па добијамо $\int_\gamma \sqrt{-2z^2 + 12z - 3}\,ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{50}(1 - \sin\varphi\cos\varphi)d\varphi = 2\pi\sqrt{50} = 10\pi\sqrt{2}$.

6. Израчунати $\displaystyle\int_\mathcal{C} (y - z)^2dx + (z - x)^2dy + (x - y)^2dz$, где је $\mathcal{C}$ контура троугла ABC с теменима $A(0, 0, 0)$, $B(1, 2, -1)$ и $C(2, -1, 1)$.

Решење. Тражени интеграл је збир интеграла по дужима AB, BC и CA.

– Од A до B: параметризација дужи је $(x,y,z) = A+t\cdot\overrightarrow{AB} = (t,2t,-t)$ и $(dx,dy,dz) = (1,2,-1)$, па је $I_{AB} = \int_0^1 [(3t)^2 + 2(2t)^2 - t^2]dt = \frac{16}{3}$.
– Од B до C: параметризација дужи је $(x,y,z) = B + t\cdot\overrightarrow{BC} = (1+t, 2-3t, -1+2t)$ и $(dx,dy,dz) = (1,-3,2)$, па је $I_{BC} = \int_0^1 [(5t-3)^2 - 3(2-t)^2 + 2(4t-1)^2]dt = 0$.
– Од C до A: параметризација дужи је $(x,y,z) = C+t\cdot\overrightarrow{CA} = (2-2t, -1+t, 1-t)$ и $(dx,dy,dz) = (-2,1,-1)$, па је $I_{CA} = \int_0^1 [-2(2-2t)^2 + (1-t)^2 - (3-3t)^2]dt = -\frac{16}{3}$.

Резултат је $I = I_{AB} + I_{BC} + I_{CA} = 0$.

7. Израчунати $I = \displaystyle\int_{\mathcal{C}} x^2 dx + xy\,dy$, где је $\mathcal{C}$ део криве $x^2+xy+y^2=1$ од тачке $A(1,0)$ до тачке $B(0,1)$.

Решење. Да бисмо параметризовали криву $\mathcal{C}$ (елипсу), допунимо једначину до квадрата и поставимо поларне координате: $(x+\frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2 = 1$ и одатле $x+\frac{1}{2} = \cos t$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}y = \sin t$, тј. $x = \cos t - \frac{1}{2}$ и $y = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin t$. У тачки A је $t=0$, а у тачки B је $t = \frac{\pi}{3}$. Како је $dx = -\sin t\,dt$ и $dy = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos t$, добијамо $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[-\left(\cos t - \frac{1}{2}\right)^2 \sin t + \frac{4}{3}\left(\cos t - \frac{1}{2}\right)\cos t \sin t\right] dt = \left|{u=\cos t \atop du=-\sin t\,dt}\right| = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[\frac{4}{3}u\left(u-\frac{1}{2}\right) - \left(u-\frac{1}{2}\right)^2\right] du = \frac{7}{72}$.

8. Одредити интеграл $I = \displaystyle\oint_\gamma \frac{dx}{y} + \frac{dy}{z} + \frac{dz}{x}$, где је γ позитивно оријентисана крива у пресеку цилиндра $y^2+z^2=1$ и конуса $x^2+y^2=z^2$ у полуравни $z \geqslant 0$.

Решење. Користимо смену $x = z\cos t$ и $y = z\sin t$. Из услова $y^2+z^2 = z^2(1+\sin^2 t) = 1$ добијамо $x = \frac{\cos t}{\sqrt{1+\sin^2 t}}$, $y = \frac{\sin t}{\sqrt{1+\sin^2 t}}$, $z = \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 t}}$, тако да је $dx = \frac{-2\sin t\,dt}{(1+\sin^2 t)^{3/2}}$, $dy = \frac{\cos t\,dt}{(1+\sin^2 t)^{3/2}}$, $dz = \frac{-\sin t\cos t\,dt}{(1+\sin^2 t)^{3/2}}$. Тражени интеграл постаје $I = \int_0^{2\pi} f(t)dt$, где је $f(t) = \frac{-2+\cos t - \sin t}{1+\sin^2 t}$. Како је $f(t) + f(t+\pi) = \frac{-4}{1+\sin^2 t}$, имамо $I = \int_0^\pi f(t)dt + \int_\pi^{2\pi} f(t)dt = \int_0^\pi (f(t)+f(t+\pi))dt = -4\int_0^\pi \frac{dt}{1+\sin^2 t}$. Последњи интеграл израчунавамо сменом $u = \mathrm{ctg} t$: тада је $\frac{dt}{1+\sin^2 t} = -\frac{\sin^2 t}{1+\sin^2 t}du = -\frac{du}{2+u^2}$, па је $I = 4\int_\infty^{-\infty} \frac{du}{2+u^2} = -4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\frac{u}{\sqrt{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty} = -2\sqrt{2}\pi$.