6. Двоструки интеграли

По аналогији са главом 5, у овој глави уводимо интеграл дате функције f по области $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Пошто се сада ради о дводимензионалној интеграцији, нпр. по двема променљивим x и y, овај интеграл означавамо са $\iint$.

За поделу Π области D на међусобно дисјунктне подобласти D_i за $i = 1, 2, \ldots, n$ дефинишемо њену финоћу као највећи од пречника подобласти D_i. У свакој од подобласти D_i одабрана је истакнута тачка M_i. Интегрална сума је дата изразом

$$S = S(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot \Delta D_i,$$

где је са ΔD_i означена *површина* области D_i. Интеграл $\iint\limits_D f\, dxdy$ је лимес интегралне суме S када подела Π тежи најфинијој могућој, тј. њена финоћа тежи нули.

Претпоставимо да је област D задата условима $a \leqslant x \leqslant b$ и $c_1(x) \leqslant y \leqslant c_2(x)$. За фиксирано x_0, интеграл функције f по делу области D на правој $x = x_0$ је

$$I(x_0) = \int_{c_1(x_0)}^{c_2(x_0)} f(x_0, y) dy.$$

Интеграл по целој области D тада налазимо интеграцијом интеграла $I(x)$ по $x \in [a, b]$:

$$\iint\limits_D f\, dxdy = \int_a^b I(x)dx = \int_a^b dx \int_{c_1(x)}^{c_2(x)} f(x, y)dy.$$

Пример 22. (а) Нека је област D дата условима $1 \leqslant x \leqslant 2$ и $1 \leqslant y \leqslant x^2$. Интеграл неке функције f по области D могао би се написати као $I = \iint\limits_D f\, dxdy = \int_1^2 dx \int_1^{x^2} f(x, y)dy$.

С друге стране, исту облает D можемо представити и у обрнутом поретку променљивих, условима $1 \leqslant y \leqslant 4$ и $\sqrt{y} \leqslant x \leqslant 2$. Зато је $I = \int_1^4 dy \int_{\sqrt{y}}^2 f(x, y)dx$.

(б) Израчунајмо сада интеграл $I = \iint\limits_D x\, dxdy$, за област D из дела (а).

Како је $\int x\, dy = xy + \mathrm{const}$, имамо $I = \int_1^2 dx \int_1^{x^2} x\, dy = \int_1^2 dx \big(xy\big|_{y=1}^{y=x^2}\big) = \int_1^2 (x^3 - x)dx = \frac{9}{4}$.

Наравно, заменом поретка интеграције добија се исти резултат:
$I = \int_1^4 dy \int_{\sqrt{y}}^2 x\, dx = \int_1^4 dy \cdot \frac{1}{2}x^2\big|_{x=\sqrt{y}}^{x=2} = \int_1^4 (2 - \frac{1}{2}y)dy = \frac{9}{4}$.

Смена променљивих

Нека нам је дат интеграл по x и y:

$$I = \iint\limits_D f(x, y)\, dxdy.$$

Претпоставимо да је област D описана параметарски, као

$$x = x(u, v) \quad \text{и} \quad y = y(u, v) \quad \text{за} \quad (u, v) \in D',$$

где је D' област у uv-равни. Подразумева се да су функције x и y (скоро свуда) непрекидно диференцијабилне по u и v у области D' - ово најчешће и јесте случај - као и да је пресликавање $(u, v) \mapsto (x, y)$ инјективно. Јавља нам се потреба да интеграл I запишемо као интеграл по u и v.

Област интеграције D по x и y постаје област D' по u и v, а интегранд $f(x,y)$ постаје функција $f(x(u,v),y(u,v))$ по u и v.

Мање је очигледно шта се при овом прелазу дешава са диференцијалом $dxdy$. Интуитивно, када се променљива u помери за du, тачка (x,y) се помера за вектор $(x'_u, y'_u)du$. Слично, када се v помери за dv, тачка (x,y) се помера за вектор $(x'_v, y'_v)dv$. На овај начин, када тачка (u,v) опише правоугаоник димензија du и dv и површине $dudv$, тачка (x,y) описује паралелограм разапет векторима $(x'_u, y'_u)du$ и $(x'_v, y'_v)dv$, чија је површина (тј. $dxdy$) једнака $\left|\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}\right| dudv$. Према томе, можемо да сматрамо да је

$$dxdy = |J(u,v)|\, dudv, \quad \text{где је} \quad J(u,v) = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} dudv.$$

Све у свему, правило смене променљивих узима следећи облик:

$$\iint_D f(x,y)\, dxdy = \iint_{D'} f\big(x(u,v), y(u,v)\big) \cdot |J(u,v)|\, dudv.$$

Детерминанта $J = J(u,v)$ се назива *Јакобијева детерминанта* или *јакобијан*.

Пример смене за којом ћемо често имати потребу су *поларне координате*:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \quad \text{и} \quad J(r,\varphi) = r, \quad \text{тј.} \quad dxdy = r\, drd\varphi.$$

Уопштене поларне координате гласе

$$\begin{cases} x = x_0 + ar\cos\varphi \\ y = y_0 + br\sin\varphi \end{cases} \quad \text{и} \quad J(r,\varphi) = abr, \quad \text{тј.} \quad dxdy = abr \cdot drd\varphi.$$

Пример 23. Нека је D унутрашњост елипсе $x^2 + 4y^2 = 8(x+y)$. Израчунати $I = \iint\limits_D xy\, dxdy$.

Решење. Једначину елипсе можемо да запишемо као $(x-4)^2 + 4(y-1)^2 = 20$, тј. $\big(\frac{x-4}{2\sqrt{5}}\big)^2 + \big(\frac{y-1}{\sqrt{5}}\big)^2 = 1$.

Унутрашњост D задовољава неједнакост

$$\big(\tfrac{x-4}{2\sqrt{5}}\big)^2 + \big(\tfrac{y-1}{\sqrt{5}}\big)^2 \leqslant 1,$$

па је згодно увести уопштене поларне координате условима $\frac{x-4}{2\sqrt{5}} = r\cos\varphi$ и $\frac{y-1}{\sqrt{5}} = r\sin\varphi$, тј.

$$x = 4 + 2r\sqrt{5}\cos\varphi \quad \text{и} \quad y = 1 + r\sqrt{5}\sin\varphi.$$

При томе је $0 \leqslant r \leqslant 1$ и $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, тј. D' је правоугаоник, па је $\iint_{D'}(\cdots)dxdy = \int_0^1 dr \int_0^{2\pi}(\cdots)d\varphi$. Јакобијан је $J = 2\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\cdot r = 10r$.

Тражени интеграл је $I = \iint_{D'}(4+2r\sqrt{5}\cos\varphi)(1+r\sqrt{5}\sin\varphi)\cdot 10r\, drd\varphi = 10\int_0^1 dr \int_0^{2\pi}(4r + 2r^2\sqrt{5}\cos\varphi + 4r^2\sqrt{5}\sin\varphi + 10r^3\cos\varphi\sin\varphi)\, d\varphi$. Како је $\int_0^{2\pi}\cos\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi}\sin\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi}\cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi = 0$, остаје нам $I = 10\int_0^1 dr \int_0^{2\pi} 4r\, d\varphi = 80\pi\int_0^1 r\, dr = 40\pi$.

Пример 24. Интеграл $\displaystyle\int e^{-x^2}dx$ је неелементарна функција. Ипак, интеграл $I = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ се може израчунати коришћењем несвојственог двоструког интреграла.

Свакако је такође $I = \int_0^\infty e^{-y^2}dy$. Према томе,

$$I^2 = \int_0^\infty e^{-x^2}dx \int_0^\infty e^{-y^2}dy = \iint\limits_{\mathbf{R}^+} e^{-x^2-y^2}dxdy,$$

где $\mathbf{R}^+$ представља први квадрант у xy-равни, тј. бесконачну област $x,y \geqslant 0$. Увођењем поларних координата $x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$ ($r \geqslant 0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$) следи

$$I^2 = \int_0^\infty e^{-r^2}\cdot r\, dr \int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty e^{-r^2}\cdot r\, dr = \frac{\pi}{4}\int_0^\infty e^{-t}\cdot dt = \frac{\pi}{4}.$$

Према томе, $I = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Запремина просторног тела

Једна од примена двоструког интеграла је у израчунавању запремине тела у простору. Тело V може бити задато условима

$$z_1(x,y) \leqslant z \leqslant z_2(x,y), \quad \text{где} \quad (x,y) \in D.$$

Област D је пројекција тела V на xy-раван. Дужина дела праве ($x = x_0$, $y = y_0$) унутар тела V једнака је $\ell(x_0, y_0) = z_2(x_0, y_0) - z_1(x_0, y_0)$. Запремину тела добијамо интеграцијом величине $\ell(x,y)$ по области D:

$$V = \iint_D \ell(x,y)\,dxdy = \iint_D (z_2 - z_1)\,dxdy.$$

Алтернативно, ако је тело смештено између равни $z = a$ и $z = b$ и површина његовог попречног пресека за $z = z_0$ је $P(z_0)$, онда његову запремину можемо да рачунамо и као

$$V = \int_a^b P(z)dz.$$

Пример 25. Израчунати запремину V између xy-равни и параболоида $z = 1 - x^2 - y^2$.

Решење. Како је $0 \leqslant z \leqslant 1 - x^2 - y^2$, имаћемо $V = \iint_D (1 - x^2 - y^2)dxdy$, где је D пројекција датог тела на xy-раван.

Област D је круг одређен условима $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и $-\sqrt{1-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2}$. Зато рачунамо $V = \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2)dy = \int_{-1}^{1} dx(y - x^2y - \frac{1}{3}y^3)\Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} = \frac{4}{3}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{3/2}dx$. Коришћењем смене $x = \sin t$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$ добијамо $V = \frac{4}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 t dt = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{8}\pi = \frac{1}{2}\pi$.

Површина површи

Нека је (скоро свуда) глатка површ σ дата параметарски, с параметрима u и v:

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v), \qquad (u,v) \in D.$$

Када се параметар u увећа за du (односно, v за dv), тачка $M(x,y,z)$ на површи помера се за вектор $\vec{\sigma}_u du$ (односно $\vec{\sigma}_v dv$), где су

$$\vec{\sigma}_u = (x'_u, y'_u, z'_u) \quad \text{и} \quad \vec{\sigma}_v = (x'_v, y'_v, z'_v).$$

На овај начин, правоугаонику са теменом (u,v) и димензијама (du, dv) у uv-равни приближно одговара "паралелограм" на површи разапет векторима $\vec{\sigma}_u du$ и $\vec{\sigma}_v dv$, а површина овог паралелограма је

$$d\sigma = |\vec{\sigma}_u \times \vec{\sigma}_v|\,dudv = |(A,B,C)|\,dudv = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,dudv, \tag{20}$$

где су

$$A = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}.$$

Површину површи σ налазимо интеграцијом $d\sigma$ по области D:

$$S = \iint_D d\sigma = \iint_D |\vec{\sigma}_u \times \vec{\sigma}_v|\,dudv = \iint_D \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,dudv. \tag{21}$$

У специјалном случају, када је површ σ експлицитно задата једначином

$$z = z(x,y), \quad (x,y) \in D,$$

улоге параметара u и v преузимају x и y, а формула (21) поприма облик

$$S = \iint_D d\sigma = \iint_D \sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2}\,dxdy. \tag{22}$$

Пример 26. Израчунати површину дела сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ изнад равни $z = 1$.

Решење. Уведимо поларне координате $x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$. Тада је $z = \sqrt{4-r^2}$, па услов $z \geqslant 1$ постаје $0 \leqslant r \leqslant \sqrt{3}$, уз $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Користимо формулу (21). Имамо

$$\sigma_r = (\cos\varphi, \sin\varphi, \tfrac{-r}{\sqrt{4-r^2}}) \quad \text{и} \quad \sigma_\varphi = (-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 0),$$

па је $\vec{\sigma}_r \times \vec{\sigma}_\varphi = (\frac{r^2}{\sqrt{4-r^2}}\cos\varphi, \frac{r^2}{\sqrt{4-r^2}}\sin\varphi, r)$ и одатле $d\sigma = |\vec{\sigma}_r \times \vec{\sigma}_\varphi|\, dr d\varphi = \frac{4r^2}{4-r^2}\, dr d\varphi$.

Према томе, тражена површина је

$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2r}{\sqrt{4-r^2}}\, dr = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2r\, dr}{\sqrt{4-r^2}} = 4\pi.$$

Задаци

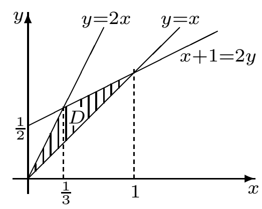
1. Израчунати $I = \iint\limits_D (x+y)\, dxdy$, где је D област одређена параболама $y = x^2$ и $y = 3 - x - x^2$.

Решење. Одредимо прво пресечне тачке двеју парабола: имамо $x^2 = 3 - x - x^2$, тј. $2x^2 + x - 3 = 0$, чија су решења $x = 1$ и $x = -\frac{3}{2}$. Дакле, $-\frac{3}{2} \leqslant x \leqslant 1$. На овом интервалу је прва елипса испод друге, те је $x^2 \leqslant y \leqslant 3 - x - x^2$. Према томе, тражени интеграл је

$$I = \int_{-\frac{3}{2}}^{1} dx \int_{x^2}^{3-x-x^2} (x+y) dy = \int_{-\frac{3}{2}}^{1} dx \left(xy + \frac{1}{2}y^2 \right)\Big|_{y=x^2}^{y=3-x-x^2} = \frac{1}{2}\int_{-\frac{3}{2}}^{1} (9 - 7x^2 - 2x^3) dx = -\frac{1375}{192}.$$

2. Област D у xy-равни је дата условима $x + 1 \geqslant 2y \geqslant 2x \geqslant y$. Наћи интеграл $I = \iint\limits_D y\, dxdy$.

Решење. Област D је најлакше представити графички, као на слици. Ова област је описана условима $x \leqslant y \leqslant 2x$ за $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3}$ и $x \leqslant y \leqslant \frac{x+1}{2}$ за $\frac{1}{3} \leqslant y \leqslant 1$. Зато је



$$I = \int_0^{\frac{1}{3}} dx \int_x^{2x} y\, dy + \int_{\frac{1}{3}}^{1} dx \int_x^{\frac{x+1}{2}} y\, dy$$
$$= \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{3x^2}{2}\, dx + \int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{1 + 2x - 3x^2}{8}\, dx = \frac{1}{54} + \frac{2}{27} = \frac{5}{54}.$$

3. Израчунати интеграл $I = \int_1^e (\ln x + 1)\, dx \int_x^e \frac{dy}{\ln y}$.

Решење. Унутрашњи интеграл је неелементаран. Зато ћемо покушати да дати двоструки интеграл рачунамо у другом поретку. Овај интеграл је по области D датој условима $1 \leqslant x \leqslant y \leqslant e$, па поредак интеграције може бити и $1 \leqslant y \leqslant e$ и $1 \leqslant x \leqslant y$. Дакле,

$$I = \int_1^e \frac{dy}{\ln y} \int_1^y (\ln x + 1) dx = \int_1^e \frac{dy}{\ln y} \cdot x\ln x\big|_{x=1}^{x=y} = \int_1^e \frac{dy}{\ln y} \cdot y\ln y = \int_1^e y\, dy = e - 1.$$

4. Дат је интеграл $I = \iint\limits_D \frac{y-x}{y+x}\, e^{x^2-y^2} dxdy$, где је D област у равни дата условима $y \geqslant x \geqslant 0$.

Сменом $x = r\,\mathrm{sh}\, t$, $y = r\,\mathrm{ch}\, t$ свести I на интеграл по r и t, а затим израчунати тај интеграл.

Решење. Услов $y \geqslant x \geqslant 0$ даје као једино ограничење D': $r \geqslant 0$ и $t \geqslant 0$.

Уверимо се прво да је предложена смена инјективна. Имамо $y + x = re^t$, $y - x = re^{-t}$ и $y^2 - x^2 = r^2$, одакле је $t = \ln\frac{y+x}{r} = \frac{1}{2}\ln\frac{y+x}{y-x}$ и $r = \sqrt{y^2 - x^2}$, па тачка (x, y) једнозначно одређује r и t, тј. смена је заиста инјективна.

Јакобијан је $J = \begin{vmatrix} \mathrm{sh}\, t & \mathrm{ch}\, t \\ r\, ch\, t & r\,\mathrm{sh}\, t \end{vmatrix} = -r$, па је $dxdy = r\, drdt$. Тражени интеграл постаје

$$I = \iint\limits_{D'} \frac{re^{-t}}{re^t} e^{-r^2} \cdot r\, drdt = \int_0^\infty e^{-2t} dt \int_0^\infty re^{-r^2} dr = \left(-\frac{1}{2}e^{-2t}\right)\Big|_{t=0}^{\infty} \cdot \left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Big|_{r=0}^{\infty} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

5. Израчунати површину површи σ дате једначином $z = x^{3/2} + y^{3/2}$ за $0 \leqslant x, y \leqslant 1$.

Решење. Овде је D правоугаоник $[0,1] \times [0,1]$. Користимо формулу (22). Пошто је $z'_x = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ и $z'_y = \frac{3}{2}\sqrt{y}$, површина S дате површи једнака је

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + \frac{9}{4}x + \frac{9}{4}y}\,dxdy = \int_0^1 dx \int_0^1 \left(1 + \frac{9}{4}x + \frac{9}{4}y\right)^{1/2} dy = \int_0^1 dx \left[\frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}x + \frac{9}{4}y\right)^{3/2}\right]\Bigg|_{y=0}^{y=1}.$$

$$= \frac{8}{27}\int_0^1 \left[\left(\frac{13}{4} + \frac{9}{4}x\right)^{3/2} - \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2}\right] dx = \frac{2}{1215}\big(22^{5/2} - 2 \cdot 13^{5/2} + 32\big) \approx 1{,}78351$$

6. Израчунати запремину тела одређеног површима $z = x^2 + 3y^2 - 4y$ и $z = 4x - y^2$.

Решење. Ове две површи се секу по елипси $x^2 + 3y^2 - 4y = 4x - y^2$, тј. након допуњавања квадрата $(x-2)^2 + (2y-1)^2 = 5$. У поларним координатама: $x = r\cos\varphi + 2$, $y = \frac{1}{2}r\sin\varphi + \frac{1}{2}$, где $0 \leqslant r \leqslant \sqrt{5}$ и $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Јакобијан је $J = \frac{1}{2}r$ и $z_1 - z_2 = (4x - y^2) - (x^2 + 3y^2 - 4y) = 5 - r^2$, тако да је запремина

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{5}} (5 - r^2) \cdot \frac{1}{2}r\,dr = \frac{25\pi}{4}.$$

7. Одредити површину дела површи $z = \sqrt{2xy}$ који лежи унутар цилиндра $x^2 + y^2 = 9$, $x, y \geqslant 0$.

Решење. Увођењем поларних координата имамо $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ и $z = r\sqrt{\sin 2\varphi}$, где је $0 \leqslant r \leqslant 3$. Приметимо и да услов $x, y \geqslant 0$ даје $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$. Штавише, површ је симетрична у односу на раван $x = y$ (тј. $\varphi = \pi/4$), па можемо да рачунамо $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4$ и резултат помножимо са 2. Како је $\vec{\sigma}_r = (\cos\varphi, \sin\varphi, \sqrt{\sin 2\varphi})$ и $\vec{\sigma}_\varphi = r(-\sin\varphi, \cos\varphi, \frac{\cos 2\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}})$, добијамо $d\sigma = r\big|(-\frac{\sin\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}}, -\frac{\cos\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}}, 1)\big|\,drd\varphi = r\sqrt{1 + \frac{1}{\sin 2\varphi}}\,drd\varphi$. Интеграцијом следи

$$P = 2\int_0^3 r\,dr \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \frac{1}{\sin 2\varphi}}\,d\varphi = 9\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \frac{1}{\sin 2\varphi}}\,d\varphi = \left| \begin{matrix} t = \frac{1}{\sin 2\varphi} \\ d\varphi = \frac{dt}{2t\sqrt{t^2-1}} \end{matrix} \right| = 9\int_1^\infty \frac{dt}{2t\sqrt{t-1}}$$

$$= \left| \begin{matrix} t = u^2+1 \\ dt = 2u\,du \end{matrix} \right| = 9\int_0^\infty \frac{du}{u^2+1} = \frac{9\pi}{2}.$$

8. Наћи површину површи дате једначином $z = e^x \sin y$ за $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $0 \leqslant y \leqslant 2\pi$.

Решење. Пошто је $dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,dxdy = \sqrt{1 + e^{2x}\sin^2 y + e^{2x}\cos^2 y}\,dxdy = \sqrt{1 + e^{2x}}\,dxdy$, површина је једнака $P = \int_0^1 \int_0^{2\pi} dS = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + e^{2x}}\,dydx = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2x}}\,dx$. Сменом $e^x = t$ и $e^x\,dx = dt$, а потом сменом $1 + t^2 = u^2$ и $tdt = udu$ добијамо

$$P = 2\pi \int_1^e \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}\,dt = 2\pi \int_1^e \frac{\sqrt{1+t^2}}{t^2}tdt = 2\pi \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^2+1}} \frac{u^2\,du}{u^2-1} = \pi \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^2+1}} \left(2 + \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right) du$$

$$= \pi\left(2u + \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^2+1}} = \pi\left(2\sqrt{e^2+1} - 2\sqrt{2} + \ln\frac{(\sqrt{e^2+1}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{e^2+1}+1)(\sqrt{2}-1)}\right) \approx 12{,}5883.$$

9. Израчунати запремину тела одређеног условима $x^2 + y^2 \leqslant 1$ и $z^2 + 2xy \leqslant 1$.

Решење. Како је овде $-\sqrt{1-2xy} \leqslant z \leqslant \sqrt{1-2xy}$, тражена запремина је $V = \iint_{x^2+y^2\leqslant 1} 2\sqrt{1-2xy}\,dxdy$. Ако ставимо поларне координате $x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$ ($0 \leqslant r \leqslant 1$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$), добијамо $V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 2r\sqrt{1 - r^2\sin 2\varphi}dr$. Унутрашњи интеграл рачунамо сменом $t = 1 - r^2\sin 2\varphi$: тада је $dt = -2r\sin 2\varphi d\varphi$ и $\int_0^1 2r\sqrt{1 - r^2\sin 2\varphi}dr = \frac{1}{\sin 2\varphi}\int_{1-\sin 2\varphi}^1 \sqrt{t}dt = \frac{2}{3\sin 2\varphi}t^{3/2}\Big|_{1-\sin 2\varphi}^1 = \frac{2 - 2(1-\sin 2\varphi)^{3/2}}{3\sin 2\varphi}$. Како је $1 - \sin 2\varphi = 1 - \cos 2(\varphi - \frac{\pi}{4}) = 2\cos^2(\varphi - \frac{\pi}{4})$, имамо $(1 - \sin 2\varphi)^{3/2} = \sqrt{8}|\cos^3(\varphi - \frac{\pi}{4})|$, па је (уз смене $\varphi = s + \frac{\pi}{4}$ и $u = s - \frac{\pi}{4}$)

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{2}{3}\int_0^{2\pi} \frac{1-(1-\sin 2\varphi)^{3/2}}{\sin 2\varphi}\,d\varphi = \frac{2}{3}\int_0^{2\pi} \frac{1-\sqrt{8}|\cos^3 s|}{\cos 2s}\,ds = \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2} \frac{1-\sqrt{8}\cos^3 s}{\cos 2s}\,ds \\
&= \frac{8\sqrt{8}}{3}\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3 s - \cos^3 s}{\cos 2s}\,ds = \frac{8\sqrt{8}}{3}\int_0^{\pi/4} \frac{(\sin s - \cos s)(1+\sin s\cos s)}{\cos 2s}\,ds \\
&= \frac{32}{3}\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(s-\frac{\pi}{4})(1+\frac{1}{2}\sin 2s)}{-\sin 2(s-\frac{\pi}{4})}\,ds = -\frac{8}{3}\int_0^{\pi/4} \frac{2+\sin 2s}{\cos(s-\frac{\pi}{4})}\,ds = -\frac{8}{3}\int_0^{\pi/4} \frac{2+\cos 2u}{\cos u}\,du \\
&= -\frac{8}{3}\int_0^{\pi/4} \frac{(3-2\sin^2 u)\cos u\,du}{1-\sin^2 u} = \frac{8}{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{(3-2t^2)dt}{1-t^2} = \frac{4}{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(4+\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt \\
&= \frac{4}{3}\big(4t - \ln(1-t) + \ln(1+t)\big)\Big|_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{8}{3}\big(\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)\big) \approx 6{,}12157.
\end{aligned}
$$