Математика 3 - писмени део испита   23.2.2015.

Група 1 - решења

1. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}.$$

<u>Решење</u>. Дата једначина је нехомогена линеарна диференцијална једначина другог реда са константним коефицијентима. Одговарајућа хомогена једначина гласи

$$y'' - 2y' + y = 0,$$

док је карактеристична једначина

$$k^2 - 2k + 1 = 0.$$

Карактеристична једначина има двоструко решење $k_{1/2} = 1$, одакле добијамо фундаментални систем решења хомогене једначине који чине функције $y_1 = e^x$ и $y_2 = xe^x$. Стога је опште решење хомогене једначине

$$y_h = c_1 e^x + c_2 x e^x.$$

За одређивање општег решења нехомогене једначине користимо Лагранжову методу варијације произвољних константи. Опште решење нехомогене једначине тражимо у облику

$$y = c_1(x) e^x + c_2(x) x e^x.$$

Прво формирамо Лагранжов систем једначина:

$$\begin{aligned} c_1'(x)e^x &+ c_2'(x)xe^x &= 0 \\ c_1'(x)e^x &+ c_2'(x)(1+x)e^x &= \frac{e^x}{x}. \end{aligned}$$

Ако прву једначину помножимо са -1, па је саберемо са другом, добијамо

$$c_2'(x)e^x = \frac{e^x}{x},$$

одакле следи

$$c_2'(x) = \frac{1}{x},$$

па је

$$c_2(x) = \int c_2'(x)dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + d_2.$$

Ако $c_2'(x) = \frac{1}{x}$ уврстимо у прву једначину Лагранжовог система, добијамо

$$c_1'(x) = -1,$$

па је

$$c_1(x) = \int c_1'(x)dx = \int (-1)dx = -x + d_1.$$

Најзад, опште решење полазне једначине је

$$y = (-x + d_1)\, e^x + (\ln|x| + d_2)\, xe^x,$$

односно, након сређивања,

$$y = (d_1 + d_2 x + x \ln|x|)e^x.$$

2. Израчунати

$$\oint_C x^3 ds,$$

где је C крива задата једначинама $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z = -\frac{1}{3}$.

Решење. Крива C је кружница која се налази у пресеку сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и равни $z = -\frac{1}{3}$. Ако $z = -\frac{1}{3}$ уврстимо у једначину сфере добијамо

$$x^2 + y^2 = \frac{8}{9},$$

па је параметризација кружнице C

$$x = \frac{2\sqrt{2}}{3}\cos t,\ y = \frac{2\sqrt{2}}{3}\sin t,\ z = -\frac{1}{3};\quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Одавде је

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}dt = \sqrt{\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\sin t\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\cos t\right)^2 + 0^2}dt = \frac{2\sqrt{2}}{3}dt$$

и

$$\oint_C x^3 ds = \int_0^{2\pi} \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\cos t\right)^2 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} dt = \frac{64}{81}\int_0^{2\pi} \cos^3 t dt = 0.$$

3. Израчунати површину оног дела површи $y^2+z^2=2x$ који исеца површ $y^2+z^2=\frac{1}{2}$.

<u>Решење</u>. Тражену површину рачунамо по формули

$$P = \iint\limits_G \sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dydz.$$

Овде је са G означена област која представља унутрашњост (укључујући и границу) пројекције пресека параболоида $y^2+z^2=2x$ и цилиндра $y^2+z^2=\frac{1}{2}$ на Oyz раван и важи

$$G:\ y^2+z^2 \leq \frac{1}{2}.$$

Из једначине параболоида $y^2+z^2=2x$ је $x=\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}z^2$, одакле је $\frac{\partial x}{\partial y}=y,\ \frac{\partial x}{\partial z}=z$, па даље имамо

$$P = \iint\limits_G \sqrt{1+y^2+z^2} dydz.$$

Преласком на поларне координате

$$y=\rho\cos\varphi,\ z=\rho\sin\varphi,$$

област G трансформишемо у област

$$D:\ \rho^2 \leq \frac{1}{2},$$

одакле добијамо границе $\varphi\,\Big|_0^{2\pi}$, $\rho\,\Big|_0^{1/\sqrt{2}}$, а јакобијан је $J=\rho$. Даље је

$$\begin{aligned} P &= \iint\limits_D \sqrt{1+\rho^2}\cdot\rho d\varphi d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{1+\rho^2}\rho d\rho \\ &= \left\{ \begin{array}{c} \text{смена } 1+\rho^2=t^2 \\ \rho d\rho = tdt \end{array} \right\} = 2\pi \int_1^{\sqrt{\frac{3}{2}}} t^2 dt = \cdots = \frac{3\sqrt{6}-4}{6}\pi. \end{aligned}$$

4. Одредити дивергенцију, ротор и векторске линије векторског поља

$$\vec{A} = \text{grad}\left(\frac{x^4+y^4+z^4}{4}\right).$$

Затим израчунати проток датог векторског поља кроз спољашњу страну површи $x^2+y^2+z^2+2y=0$.
Решење. Поље $\vec{A}$ можемо записати као

$$\vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{x^4+y^4+z^4}{4}, \frac{\partial}{\partial y}\frac{x^4+y^4+z^4}{4}, \frac{\partial}{\partial z}\frac{x^4+y^4+z^4}{4}\right) = (x^3, y^3, z^3).$$

Дивергенција поља $\vec{A}$ је

$$\begin{aligned}\text{div}\vec{A} &= \nabla \cdot \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(x^3,y^3,z^3) = \frac{\partial}{\partial x}x^3 + \frac{\partial}{\partial y}y^3 + \frac{\partial}{\partial z}z^3 \\ &= 3x^2+3y^2+3z^2 = 3(x^2+y^2+z^2),\end{aligned}$$

док је ротор поља $\vec{A}$

$$\begin{aligned}\text{rot}\vec{A} = \nabla \times \vec{A} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y}z^3 - \frac{\partial}{\partial z}y^3\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial}{\partial x}z^3 - \frac{\partial}{\partial z}x^3\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}y^3 - \frac{\partial}{\partial y}x^3\right)\vec{k} \\ &= (0-0)\,\vec{i} - (0-0)\,\vec{j} + (0-0)\,\vec{k} = \vec{0}.\end{aligned}$$

Векторске линије одређујемо из одговарајућег система диференцијалних једначина у симетричном облику

$$\frac{dx}{x^3} = \frac{dy}{y^3} = \frac{dz}{z^3}.$$

Из једнакости

$$\frac{dx}{x^3} = \frac{dy}{y^3}$$

након интеграције добијамо

$$c_1 = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2},$$

док из једнакости

$$\frac{dx}{x^3} = \frac{dz}{z^3}$$

након интеграције следи

$$c_2 = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{z^2}.$$

Дакле, векторске линије датог векторског поља су

$$c_1 = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}, \quad c_2 = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{z^2}.$$

Проток векторског поља $\vec{A}$ је

$$\begin{aligned}
\Phi_\Gamma(\vec{A}) &= \iint\limits_\Gamma x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy = \left\{ \begin{array}{c} \text{formula} \\ \text{Gaus-Ostrogradskog} \end{array} \right\} \\
&= \iiint\limits_T \left(\frac{\partial x^3}{\partial x} + \frac{\partial y^3}{\partial y} + \frac{\partial z^3}{\partial z} \right) dxdydz \\
&= 3 \iiint\limits_T \left(x^2 + y^2 + z^2 \right) dxdydz.
\end{aligned}$$

Овде је са Γ означена сфера $x^2 + y^2 + z^2 + 2y = 0$, а са T њена унутрашњост (укључујући и границу),

$$T: \; x^2 + y^2 + z^2 + 2y \le 0,$$

односно

$$T: \; x^2 + y^2 + z^2 \le -2y.$$

Преласком на сферне координате

$$x = \rho \cos\varphi \sin\theta, \quad y = \rho\cos\theta, \quad z = \rho\sin\varphi\sin\theta,$$

тело T трансформишемо у тело

$$U: \; \rho^2 \le -2\rho\cos\theta,$$

односно, за тело U важи

$$\rho \leq -2\cos\theta.$$

Одавде следи $\rho|_0^{-2\cos\theta}$. С обзиром да је ρ ненегативно и да важи $\rho \leq -2\cos\theta$, мора бити испуњено $-2\cos\theta \geq 0$, одакле следи $\cos\theta \leq 0$, па је $\theta|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$. Важи и $\varphi|_0^{2\pi}$, а јакобијан је $J = \rho^2 \sin\theta$. Даље је

$$\begin{aligned}
\Phi_\Gamma(\vec{A}) &= 3\iiint\limits_U \rho^2 \cdot \rho^2 \sin\theta d\varphi d\theta d\rho = 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{-2\cos\theta} \rho^4 d\rho \\
&= 3\,\varphi|_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin\theta \left.\frac{\rho^5}{5}\right|_0^{-2\cos\theta} d\theta = 3\cdot 2\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin\theta \frac{-32\cos^5\theta}{5} d\theta \\
&= \frac{192\pi}{5}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^5\theta(-\sin\theta)d\theta = \left\{\begin{array}{c} \text{smena } \cos\theta = t \\ -\sin\theta d\theta = dt \\ \theta = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0 \\ \theta = \pi \Rightarrow t = -1 \end{array}\right\} \\
&= \frac{192\pi}{5}\int_0^{-1} t^5 dt = \frac{192\pi}{5} \left.\frac{t^6}{6}\right|_0^{-1} = \frac{32\pi}{5}.
\end{aligned}$$

Математика 3 - писмени део испита 23.2.2015.

Група 2 - решења

1. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}.$$

Решење. Овај задатак се решава аналогно 1. задатку групе 1. Добија се опште решење

$$y = (d_1 + d_2 x + x\ln|x|)e^{-x}.$$

2. Израчунати

$$\oint_C y^3 ds,$$

где је C крива задата једначинама $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z = -\frac{2}{3}$.
Решење. Овај задатак се решава аналогно 2. задатку групе 1. Добија се

$$\oint_C y^3 ds = 0.$$

3. Израчунати површину оног дела површи $x^2 + z^2 = 2y$ који исеца површ $x^2 + z^2 = \frac{1}{2}$.
Решење. Овај задатак се решава аналогно 3. задатку групе 1, с тим што x и y замене улоге. Добија се исто решење

$$P = \frac{3\sqrt{6} - 4}{6}\pi.$$

4. Одредити дивергенцију, ротор и векторске линије векторског поља

$$\vec{A} = \mathrm{grad}\left(\frac{x^4 + y^4 + z^4}{4}\right).$$

Затим израчунати проток датог векторског поља кроз спољашњу страну површи $x^2 + y^2 + z^2 + 2x = 0$.
Решење. Овај задатак се решава аналогно 4. задатку групе 1, с тим што x и y замене улоге. Добијају се исти резултати: дивергенција

$$\mathrm{div}\vec{A} = 3(x^2 + y^2 + z^2),$$

ротор

$$\mathrm{rot}\vec{A} = \vec{0},$$

векторске линије

$$c_1 = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}, \quad c_2 = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{z^2},$$

и проток

$$\Phi_\Gamma(\vec{A}) = \frac{32\pi}{5}.$$