Pismeni ispit iz Numeričkih metoda, I grupa

1. Koristeći razvoj u potencijalni red funkcije $\cos x$, razviti u potencijalni red funkciju
$$f(x) = \int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2} dt.$$
Odrediti poluprečnik konvergencije dobijenog reda.

Rešenje. Razvoj funkcije cos je
$$\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!},$$
odakle dobijamo
$$\int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2} dt = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} \int_0^x t^{2k-2} dt = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k-1}}{(2k)!(2k-1)}.$$
Poluprečnik konvergencije dobijenog reda je isti kao poluprečnik konvergencije reda funkcije cos, jer oduzimanje broja od reda ne možemo promeniti poluprečnik konvergencije reda, niti ga možemo promeniti deljenjem nekim stepenom promenljive, naravno, dok god je rezultat deljenja potencijalni red. Konačno ne možemo promeniti poluprečnik konvergencije reda ni izračunavanjem integrala ako je donja (ili gornja) granica nula.

Primetimo da dobijeni red funkcije $(1-\cos t)/t^2$ jeste potencijalni red. Kako potencijalni red uvek uniformno konvergira na intervalu $[a,b] \subset (-R,R)$, možemo red intergaliti član po član na svakom intervalu $[0,x] \subset (-R,R)$. Pri tome novodobijeni red, posle integracije član po član, ima isti poluprečnik konvergencije kao polazni red.

Poluprečnik kovergencije je
$$\lim_{k\to+\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^k}{(2k)!(2k-1)}}{\frac{(-10^{k+1}}{(2k+2)!(2k+1)}} \right| = +\infty.$$

2. Ispitati konvergenciju iterativnog procesa

$$x^{k+1} = Bx^k + \beta, , \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad B = \begin{bmatrix} .5 & .05 \\ .05 & .5 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} 1. \\ 1. \end{bmatrix}.$$

U slučaju da je proces konvergentan naći rešenje sa tačnošću od 2 značajne cifre ili sa relativnom greškom manjom od 10^{-2}.

Rešenje. Dovoljno je naći jednu normu matrice B koja je manja od jedan. Na primer, $||B||_{+\infty} = \max\{.5 + .05, .5 + .05\} = .55 < 1$, dakle, proces je konvergentan. Kako važi

$$||x^k - x|| \leq ||B||^k ||x^0 - x||, \quad -\log_{10} \frac{||x^k - x||}{||x||} \geq -k \log_{10} ||B|| - \log_{10} \frac{||x^0 - x||}{||x||},$$

$$z_k \geq -k \log_{10} ||B|| + z_0,$$

pod pretpostavkom da početna vrednost ima nula značajnih cifara, možemo izračunati broj potrebnih itracija za postizanje 2 značajne cifre. Dobijamo

$$k \leq \frac{2}{-\log_{10} .55} \approx 8.$$

Za odredjivanje rešenja sa 2 značajne cifre ili relativnom manjom od 10^{-2}, što je u suštini isti uslov samo drugačije iskazan, konstrušemo niz vektora x^k i tražimo korak kad su dve cifre stabilizovane. Dobijamo

	0	0
1	1.000000000000000	1.000000000000000
2	1.550000000000000	1.550000000000000
3	1.852500000000000	1.852500000000000
4	2.018875000000000	2.018875000000000
5	2.110381250000000	2.110381250000000
6	2.160709687500000	2.160709687500000
7	2.188390328125000	2.188390328125000
8	2.203614680468750	2.203614680468750
9	2.211988074257812	2.211988074257812

Kako važi generalna ocena

$$||x^{k+1} - x||_{+\infty} \leq \frac{||B||_{+\infty}}{1 - ||B||_{+\infty}} ||x^{k+1} - x^k||_{+\infty}$$

možemo odrediti

$$||x^9 - x||_{+\infty} \leq .0102.$$

Odavde možemo oceniti broj značajnih cifara

$$-\log_{10} \frac{||x^9 - x||}{||x^9||} \geq 2.33$$

zaključujemo da je rešenje sistema sa bar dve značajne cifre iteracija 9.

3. Naći Newtonov interpolacioni polinom za skup podataka

	0	1	2	3
x_k	1	1.5	2.1	3.3
$f(x_k)$	2.3	2.2	1.2	1.9

Odrediti približno vrednost funkcije f u tački 1.7 i oceniti učinjenu grešku.

Rešenje. Da bismo odredili Newtonov interpolacioni polinom formiramo tablicu podeljenih razlika. Nalazimo

k	x_k	$[x_k; f]$	$[x_k, x_{k+1}; f]$	$[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}; f]$	$[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}; f]$
0	1.	$\underline{2.3}$			
			$\frac{2.2-2.3}{1.5-1.} = \underline{-.2}$		
1	1.5	2.2		$\frac{-1.667-(-.2)}{2.1-1.} = \underline{-1.333}$	
			$\frac{1.2-2.2}{2.1-1.5} = -1.667$		$\frac{1.25-(-1.333)}{3.3-1.} = \underline{1.1232}$
2	2.1	1.2		$\frac{.5833-(-1.667)}{3.3-1.5} = 1.25$	
			$\frac{1.9-1.2}{3.3-2.1} = .5833$		
3	3.3	1.9			

Odavde nalazimo Newtonov interpolacioni polinom

$$P_3(x) = 2.3 - .2(x-1.) - 1.333(x-1.)(x-1.5) + 1.1232(x-1.)(x-1.5)(x-2.1)$$

Vrednost interpolacionog polinoma u tački 1.7 iznosi

$$P_3(1.7) \approx 1.91$$

Greška interpolacije je ista kao kod Lagrangeovog interpolacionog polinoma

$$|R_3(x)| \leq \frac{|f^{(3+1)}(\psi)|}{(3+1)!}|(1.7-1.)(1.7-1.5)(1.7-2.1)(1.7-3.3)| \leq .0037 \cdot M_4,$$
$$M_4 = \max_{\psi\in[1,3.3]} |f^{(4)}(\psi)|.$$

4. Koristeći Newtonov metod odrediti približno pozitivno rešenje jednačine $5x = x^4 - 1$ sa barem 5 značajnih cifara ili relativnom greškom od 10^{-5}.

Rešenje. Označimo da α traženo rešenje jednačine. Ako nacrtamo krive $x^4 - 1$ i $5x$ vidimo da se seku u dve tačke, jedna ima pozitivnu vrednost x koordinate a druga negativnu. Formirajmo funkciju $f(x) = x^4 - 5x - 1$. Možemo relativno jednostavno odrediti da je rešenje jednačine u intervalu $[1, 2]$, jer je $f(1) = -5 < 0$ i $f(2) = 5 > 0$. Izvod funkcije f je $f'(x) = 4x^3 - 5$. Vidimo da moramo suziti interval, jer je $f'(1) = -1 < 0$ i $f'(2) = 27 > 0$, pa izvod uzima vrednost nula na intervalu $[1, 2]$. Probajmo sa intervalom $[1.2, 2]$. Dobijamo $f(1.2) \approx -4.93 < 0$ i $f'(x) \approx 1.91 > 0$. Sad možemo tvrditi da je rešenje na intervalu $[1.2, 2]$ i da je vrednost izvoda na ovom intervalu pozitivna. Dakle, ako izaberemo dobru startnu vrednost Newtonov proces konvergira kvadratno. Newtonov proces izgleda ovako

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^4 - 5x_k - 1}{4x_k^3 - 5}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Kako nam je potrebno 5 značajnih cifara ili relativna greška manja od 10^{-5} što je u suštini isto potrebno je vršiti iteracije dok se ne stabilizuju barem 5 cifara. Izaberemo li $x_0 = 2$, nalazimo

```
0    2.000000000000000
1    1.814814814814815
2    1.773912275060910
3    1.772032863658380
4    1.772029001981148
5    1.772029001964867
```

Očigledno je proces konvergentan i konvergira ka vrednosti

$$\alpha \approx 1.772029001964867.$$

Kako je $f''(x) = 12x^2$, broj značajnih cifara je

$$-\log_{10}\frac{|x_5 - x_4|}{|x_5|} \approx 11.$$

Kako je $f''(x) = 12x^2 > 0$, $x \in [1.2, 2]$, možemo zaključiti da važi $f(x) \geq y = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$, $x \in [1.2, 2]$, i $x_k \in [1.2, 2]$, jer je funkcija konveksna na intervalu $[1.2, 2]$ pa se grafik uvek nalazi iznad tangente, drugim rečima vrednost funkcije je uvek veća od vrednosti tangente. Neka je $f(x_k) > 0$, onda je $\alpha < x_{k+1} < x_k$, jer vrednost tangente mora biti manja od vrednosti funkcije a vrednost funkcije u tački α iznosi nula dok je u ostalim tačkama pozitivna. Zaključujemo da je niz x_k opadajući, jer je $f(2) > 0$ i $x_0 = 2$.

5. Koristeći uopštenu trapeznu formulu sa pet podintervala, naći približno vrednost izraza

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x-3}.$$

Dati procenu greške.

Rešenje. Kako imamo pet podintervala to $H = (1 - (-1))/5 = .4$. Uopštena trapezna formula ima formu

$$T_5(f) = \frac{h}{2}\left(f(-1) + 2f(-.6) + 2f(-.2) + 2f(.2) + 2f(.6) + f(1)\right) \approx -0.695634920634921.$$

Grešku možemo odrediti i eksplicitno, jer je tačna vrednost integrala $I = -\log(2)$, odavde nalazimo

$$|T_5(f) - I| \leq .0025, \quad -\log_{10}\frac{|T_5(f) - I|}{|I|} \geq 2.45$$

Teorijski grešku možemo odrediti koristeći formulu za grešku koja postaje

$$|I - T_5(f)| \leq \frac{(1-(-1))^3}{12\cdot 5^2}\max_{\psi\in[-1,1]}|f''(\psi)| \leq \frac{2}{75}\max_{\psi\in[1,2]}\frac{2}{|\psi-3|^3} \leq \frac{4}{300} \approx .013$$

Pismeni ispit iz Numeričkih metoda, II grupa

1. Koristeći razvoj u potencijalni red funkcije $\log(1+x)$, razviti u potencijalni red funkciju

$$f(x) = \int_0^x \frac{\log(1+t) - t}{t^2} dt.$$

Odrediti poluprečnik konvergencije dobijenog reda.

Rešenje. Razvoj u potencijalni red funcije $\log(1+x)$ je

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}.$$

Odavde nalazimo

$$f(x) = \int_0^x \frac{\log(1+t) - t}{t^2} dt = \int_0^x \left(\sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{t^{k-2}}{k} \right) dt = \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{k-1}}{k(k-1)}.$$

Poluprečnik novodobijenog reda je

$$\lim_{k \to +\infty} \left| \frac{\frac{1}{(k-1)k}}{\frac{1}{k(k+1)}} \right| = 1.$$

Pogledati i rešenje zadatka 1 u prvoj grupi za neke komentare.

2. Ispitati konvergenciju iterativnog procesa

$$x^{k+1} = Bx^k + \beta, , \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad B = \begin{bmatrix} .05 & .5 \\ .5 & .05 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} 1. \\ 1. \end{bmatrix}.$$

U slučaju konvergencije iterativnog procesa odrediti rešenje sistema linearnih jednačina sa barem 2 značajne cifre ili sa relativnom greškom manjom od 10^{-2}.

Rešenje. Za neke komentare pogledati rešenje zadatka 2 u prvoj grupi. Norma matrice B je $||B||_{+\infty} \max\{.05 + .5, .05 + .5\} = .55 < 1$, zaključujemo da proces konvergira. Broj iteracija potreba za odredjivanje rešenja sa dve značajne cifre je

$$k \leq \frac{2}{-\log_{10} .55} \approx 8$$

Startujući sa $x_0 = (0, 0)$ nalazimo

```
                    0                    0
1    1.000000000000000    1.000000000000000
2    1.550000000000000    1.550000000000000
3    1.852500000000000    1.852500000000000
4    2.018875000000000    2.018875000000000
5    2.110381250000000    2.110381250000000
6    2.160709687500000    2.160709687500000
7    2.188390328125000    2.188390328125000
8    2.203614680468750    2.203614680468750
9    2.211988074257812    2.211988074257812
```

Koristeći iste argumente kao u rešenju drugog zadatka u grupi 1, nalazimo

$$||x^9 - x||_{+\infty} \leq \frac{||B||_{+\infty}}{1 - ||B||_{+\infty}} ||x^9 - x^8||_{+\infty} \approx .0102$$

Nalazimo broj značajnih cifara

$$-\log_{10} \frac{||x^9 - x||_{+\infty}}{||x^9||_{+\infty}} \geq 2.33$$

3. Naći Lagrangeov interpolacioni polinom za skup podataka

	0	1	2	3
x_k	1	1.5	2.1	3.2
$f(x_k)$	2.2	2.1	1.5	1.7

Odrediti približno vrednost funkcije f u tački 2.2 i oceniti učinjenu grešku.

Rešenje. Prvo konstruišemo Lagrangeov bazis, nalazimo

$$
\begin{aligned}
\ell_0(x) &= \frac{(x-1.5)(x-2.1)(x-3.2)}{(1-1.5)(1-2.1)(1.-3.2)} \approx -.83(x-1.5)(x-2.1)(x-3.2),\\
\ell_1(x) &= \frac{(x-1)(x-2.1)(x-3.2)}{(1.5-1)(1.5-2.1)(1.5-3.2)} \approx 1.96(x-1)(x-2.1)(x-3.2),\\
\ell_2(x) &= \frac{(x-1)(x-1.5)(x-3.2)}{(2.1-1)(2.1-1.5)(2.1-3.2)} \approx -1.38(x-1)(x-1.5)(x-3.2),\\
\ell_3(x) &= \frac{(x-1)(x-1.5)(x-2.1)}{(3.2-1)(3.2-1.5)(3.2-2.1)} \approx .24(x-1)(x-1.5)(x-2.1)
\end{aligned}
$$

Lagrangeov interpolacioni polinom je zadat sa

$$P_3(x) = 2.2\ell_0(x) + 1.2\ell_1(x) + 1.5\ell_2(x) + 1.7\ell_3(x).$$

Vrednost interpolacionog polinoma u tački 2.2 iznosi

$$P_3(2.2) \approx 1.41$$

Učinjena greška interpoalcije iznosi

$$
\begin{aligned}
|f(2.2) - P_3(2.2)| &\le \frac{|(2.2-1)(2.2-1.5)(2.2-2.1)(2.2-3.2)|}{(3+1)!} \max_{\psi\in[1,3.2]} |f^{(3+1)}(\psi)| \le .0035M_4,\\
M_4 &= \max_{\psi\in[1.3.3]} |f^{(4)}(\psi)|.
\end{aligned}
$$

4. Koristeći Newtonov metod odrediti približno pozitivno rešenje jednačine $5x = x^4 - 2$ sa barem 5 značajnih cifara ili sa relativnom greškom manjom od 10^{-5}.

   Rešenje. Označimo da α traženo rešenje jednačine. Ako nacrtamo krive $x^4 - 2$ i $5x$ vidimo da se seku u dve tačke, jedna ima pozitivnu vrednost x koordinate a druga negativnu. Formirajmo funkciju $f(x) = x^4 - 5x - 2$. Možemo relativno jednostavno odrediti da je rešenje jednačine u intervalu $[1, 2]$, jer je $f(1) = -6 < 0$ i $f(2) = 4 > 0$. Izvod funkcije f je $f'(x) = 4x^3 - 5$. Vidimo da moramo suziti interval jer je $f'(1) = -1 < 0$ i $f'(2) = 27 > 0$, pa izvod uzima vrednost nula na intervalu $[1, 2]$. Probajmo sa intervalom $[1.2, 2]$. Dobijamo $f(1.2) \approx -5.92 < 0$ i $f'(x) \approx 1.91 > 0$. Sad možemo tvrditi da je rešenje na intervalu $[1.2, 2]$ i da je vrednost izvoda na ovom intervalu pozitivna. Dakle, ako izaberemo dobru startnu vrednost Newtonov proces konvergira kvadratno. Newtonov proces izgleda ovako

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^4 - 5x_k - 2}{4x_k^3 - 5}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Kako nam je potrebno 5 značajnih cifara ili relativna greška manja od 10^{-5} što je u suštini isto, potrebno je vršiti iteracije dok se ne stabilizuju barem 5 cifara. Izaberemo li $x_0 = 2$, nalazimo

```
0    2.000000000000000
1    1.851851851851852
2    1.827285492347684
3    1.826651204919468
4    1.826650789113632
5    1.826650789113453
```

Očigledno je proces konvergentan i konvergira ka vrednosti

$$\alpha \approx 1.826650789113453.$$

Broj značajnih cifara je

$$-\log_{10} \frac{|x_5 - x_4|}{|x_5|} \approx 13.$$

Videti završni komentar u zadatku 4 u prvoj grupi.

5. Koristeći uopštenu formulu srednje tačke sa šest podintervala, naći približno vrednost izraza

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x-2}.$$

Dati procenu greške.

Rešenje. Nalazimo $h = (1-(-1))/6 = 1/3$. Uopštena formula srednje tačke je

$$M_6(f) = h\left(f\left(-1+\frac{1}{6}\right) + f\left(-1+\frac{3}{6}\right) + f\left(-1+\frac{5}{6}\right) + f\left(-1+\frac{7}{6}\right) + f\left(-1+\frac{11}{12}\right) + f\left(-1+\frac{11}{12}\right)\right) \approx -1.094581235757706$$

Kako je vrednost integrala $I = -\log(3)$ možemo odrediti greške

$$|M_6(f) - I| \approx .004, \quad -\log_{10} \frac{|M_6(x) - I|}{|I|} \approx 2.4.$$

Teorijski vrednost apsolutne greške možemo oceniti sa

$$|M_6(f) - I| \leq \frac{(1-(-1))^3}{125^2} \max_{\psi \in [-1,1]} |f''(\psi)| \leq .053$$