Univerzitet u Beogradu
Mašinski fakultet
Katedra za Matematiku

Tejlorov i Maklorenov polinom - vežbanje

Zadatak: Funkciju

$$f(x) = \ln\left(x^2 - 2x + 2\right)$$

razviti u Tejlorov polinom 3. stepena u okolini tačke $a = 1$.

Rešenje: **Prvi način:** Tejlorov polinom stepena 3 za $a = 1$ oblika je:

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-1) + \frac{f''(a)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-1)^3 \tag{1}$$

Jednostavno se računaju potrebne vrednosti:

$$f(1) = \ln\left(1^2 - 2\cdot 1 + 2\right) = \ln 1 = 0 \tag{2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}\cdot(2x-2) \Rightarrow f'(1) = 0 \tag{3}$$

jer je podizraz $(2x-2)$ za $x = 1$ jednak 0.

$$f''(x) = \frac{-1}{\left(x^2-2x+2\right)^2}\cdot(2x-2)^2 + \frac{1}{x^2-2x+2}\cdot 2 \Rightarrow f''(1) = 2 \tag{4}$$

Drugi izvod je računat kao izvod proizvoda. Prvi sabirak za $x = 1$ je odmah jednak 0, dok je drugi sabirak jednak 2. Slično se računa i treći izvod:

$$f^{(3)}(x) = \frac{2}{\left(x^2-2x+2\right)^3}\cdot(2x-2)^3 + \frac{-1}{\left(x^2-2x+2\right)^2}\cdot 2\,(2x-2) + \frac{-2}{\left(x^2-2x+2\right)^2}\cdot(2x-2)$$

Iz pretodnog sledi da je:

$$f^{(3)}(1) = 0 \tag{5}$$

Konačno kada se (2), (3), (4), (5) unese u (1) dobija se:

$$f(x) \approx \frac{2}{2!}(x-1)^2 \Rightarrow f(x) \approx (x-1)^2$$

Drugi način: Ako iskoristimo da za svaki prirodan broj n Maklorenov polinom n-tog stepena funkcije $\ln(1+t)$ glasi

$$\ln(1+t) = t + \frac{t^2}{2} + \ldots + \frac{t^n}{n}$$

(ovo je praktično primenljvo kad je vrednost t blizu 0) i $x^2 - 2x + 2$ zapišemo kao $(x-1)^2 + 1$, pri čemu $t = (x-1)^2$ tačno jeste blizu 0 kad je x blizu 1, dobijamo da je već odgovarajući

Maklorenov polinom 2-og stepena po t oblika

$$\ln\left(1+(x-1)^2\right)=(x-1)^2+\frac{\left((x-1)^2\right)^2}{2}=(x-1)^2+\frac{(x-1)^4}{2},$$

tj. da sadrži $(x-1)^4$. Kako nas interesuje Maklorenov polinom po x koji sadrži stepene ne preko $(x-1)^3$, treba nam samo deo $(x-1)^2$.

Aleksandar Pejčev