1. Rešenja zadataka pošaljite na email adresu:

   numericke.metode.metode@gmail.com

   do 19:59 časova 02.03.2015. godine. Rešenja zadataka pristigla sa zakašnjenjem neće biti uzimana u razmatranje, bez obzira na izgovor.

2. Prilikom slanja email-a u polju subject navedite sledeću nisku znakova:

   KMA.NM.999/GG

   gde je:

   - KMA-oznaka Katedre za Matematiku
   - NM-oznaka za Numeričke metode
   - 999/GG-broj indeksa studenta gde se unosi vodeća nula

   Na primer, ako Vam je broj indeksa 23 i neka ste upisani 2011 godine, tada u subject-u treba da stoji:

   KMA.NM.023/11

   Slično, ako Vam je broj indeksa 124 i neka ste upisani 2011 godine, tada u subject-u treba da stoji:

   KMA.NM.124/11

3. Rešenje zadataka: program u Matlaby, slike kao ilustracije u JPEG formatu, tekst otkucan u Wordu, pa eksportovan u pdf, ili skenirana rešenja pisana na papiru, pošaljite kao attachment Vašeg email-a, tako što sve fileove vezane za jedan zadatak zapakujete u zip arhive sa imenima

   zadatak01.zip, zadatak02.zip, zadatak03.zip, zadatak04.zip

4. Poslednji pristigli Vaš email je važeći i on će biti pregledan, dakle, mora sadržati rešenja svih zadataka koja želite da pošaljete.

5. Svako prepisivanje biće sankcionisano, pored toga, morate usmeno odbraniti rad koji ste poslali.

6. Rešenje svakog zadatka donosi 20%.

Univerzitet u Beogradu 01.03.2015.
Mašinski fakultet

# Pismeni ispit iz Numeričkih metoda

1. Pretpostavimo da računate veličinu $z$ na osnovu veličina $x$ i $y$, koristeći sedeću funkcionalu zvaisnost

$$z = e^{-x/y}.$$

a) Pretpostavimo da možete izvršiti merenja vrednosti veličina $x$ i $y$ sa četiri značajnih cifara. Nacrtati grafik zavisnosti broja značajnih cifara vrednosti veličine $z$ ako se veličine $x$ i $y$ menjaju u intervalu $[-1, 1]$. Odrediti približno oblasti u kojima su izračunavanja loše i dobro uslovljena.

b) Odrediti teorijski donju granicu broja značajnih cifara prilikom izračunavanja veličine $z$ pod uslovom da su veličine $x$ i $y$ zadate sa $m$ značajnih cifara. Nacrtati grafički zavisnost minimalnog broja značajnih cifara u funkciji vrednsoti $x$ i $y$, za vrednost $m = 4$.

c) Uporediti rezultate dobijene pod a i b. Objasniti na osnovu razmatranja izraza dobijenog u delu pod b oblasti u kojima su izračuanvanja loše i dobro uslovljena.

Script koji crta trodimenzionalni grafik funkcije $z$ nad oblašću $[-1, 1] \times [-1, 1]$, može biti sledeći

```
n=20;
z=@(x,y) exp(-x./y);
x=linspace(-1,1,n);
y=linspace(-1,1,n);
[x,y]=meshgrid(x,y);
mesh(x,y,z(x,y));
```

2. Pretpostavimo da rešavate sistem linearnih jednačina čija je matrica Vandermondeova, dakle, neka je sistem linearnih jednačina zadat sa

$$Ax = b, \quad A_n(t) = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \dots & t_2^{n-1} \\ 1 & t_3 & t_3^2 & \dots & t_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \dots & t_n^{n-1} \end{bmatrix}, \quad t = (t_1, \dots, t_n), \quad x = (1, 1, 1, \dots, 1).$$

a) Nacrati grafik zavisnosti broja značajnih cifara u rešenju sistema linearnih jednačina u funkciji reda matrice $n$. Grafik nacrtati za vrednosti $n$ koje pripadaju skupu $\{5k \mid k = 1, \ldots, 10\}$. Elemente vektora $t$ birati na slučajan način iz intervala $[-10, 10]$. Odrediti približno, na osnovu grafika, red sistema linearnih jednačina za koji je broj značajnih cifara u rešenju jednak nula.

b) Na osnovu postupka izloženog pod a, pri čemu elementi vektora $t$ pripadaju intervalima $[-5-5k, 5+5k]$, $k = 0, \ldots, 10$, odrediti približno najmanji red sistema linearnih jednačina $n$ koji ima nula značajnih cifara u rešenju. Prikazati grafički zavinost reda sistema linearnih jednačina u funkciji dužine intervala kojem pripadaju elementi vektora $t$, dakle od $k$.

c) Na osnovu dobijenih rezultata i koristeći izraz za ocenu greške prilikom rešavanja sistema linearnih jednačina obrazložiti da faktor uslovljenosti Vandermondeove matrice raste sa porastom dužine intervala kome pripadaju elementi vektora $t$.

Funkcija koja konstruiše Vandermondeovu matricu u matlabu zadati vektor $t$ je `vander`.

3. Posmatrajmo iterativni proces

$$x_{k+1} = \phi(x_k), \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad x_0 = 2,$$

gde je iterativna funkcija zadata sa

$$\phi(x) = \frac{3x^4 + 1}{4x^3}.$$

a) Pod pretpostavkom da niz $x_k$ konvergira ka vrednosti 1, nacrtati broj značajnih cifara u funkciji $k$. Odrediti na osnovu grafika red konvergencije iterativnog procesa. Najjednostavnije je posmatrati grafik $\log(z_k)$, gde je $z_k$ broj značajnih cifara u iteraciji $k$.

b) Pokazati analitički da je red konvergencije iterativnog procesa 2.

c) Odrediti teorijski broj iteracija potreban za dostizanje mašinske tačnosti. Uporediti ovaj broj iteracija sa eksperimentalno dobijenim rezutlatom pod a.

4. a) Naći egzaktno rešenje Chauchyevog problema

$$y' = -y, \quad y(0) = 1.$$

b) Napisati funkcije u `Matlabu` koje aproksimiraju rešenje posmatranog Cauchyevog problema koristeći Eulerov metod

$$y_{n+1} = y_n + hf_n, \quad y_0 = y(0),$$

i implicitni metod

$$y_{n+3} - \frac{18}{11}y_{n+2} + \frac{9}{11}y_{n+1} - \frac{2}{11}y_n = \frac{6}{11}hf_{n+3},$$

vrednosti $y_2$, $y_1$ i $y_0$ odrediti na osnovu egzaktnog rešenja.

c) Nacrtati grafik zavisnosti broja značajnih cifara aproksimacije rešenja $y(1)$ u funkciji logaritma koraka $h = 2^{-k}$, $k = 1, \ldots, 15$. Oceniti na osnovu grafika red upotrebljenog implicitnog metoda.

d) Nacrtati grafik zavisnosti broja značajnih cifara rešenja Cauchyevog problema, prilikom izračunavanja implicitnim metodom, na intervalu $[0, 4]$ za $h = 2^{-k}$, $k = 1, \ldots, 15$. Na osnovu grafika oceniti oblast stabilnosti implicitnog metoda.

prof. dr Aleksandar Cvetković