Rešenje pismenog ispita iz Numeričkih metoda

1. Pretpostavimo da računate veličinu z na osnovu veličina x i y, koristeći sedeću funkcionalu zvaisnost
$$z = e^{-x/y}.$$

   a) Pretpostavimo da možete izvršiti merenja vrednosti veličina x i y sa četiri značajnih cifara. Nacrtati grafik zavisnosti broja značajnih cifara vrednosti veličine z ako se veličine x i y menjaju u intervalu $[-1, 1]$. Odrediti približno oblasti u kojima su izračunavanja loše i dobro uslovljena.

   b) Odrediti teorijski donju granicu broja značajnih cifara prilikom izračunavanja veličine z pod uslovom da su veličine x i y zadate sa m značajnih cifara. Nacrtati grafički zavisnost minimalnog broja značajnih cifara u funkciji vrednsoti x i y, za vrednost $m = 4$.

   c) Uporediti rezultate dobijene pod a i b. Objasniti na osnovu razmatranja izraza dobijenog u delu pod b oblasti u kojima su izračuanvanja loše i dobro uslovljena.

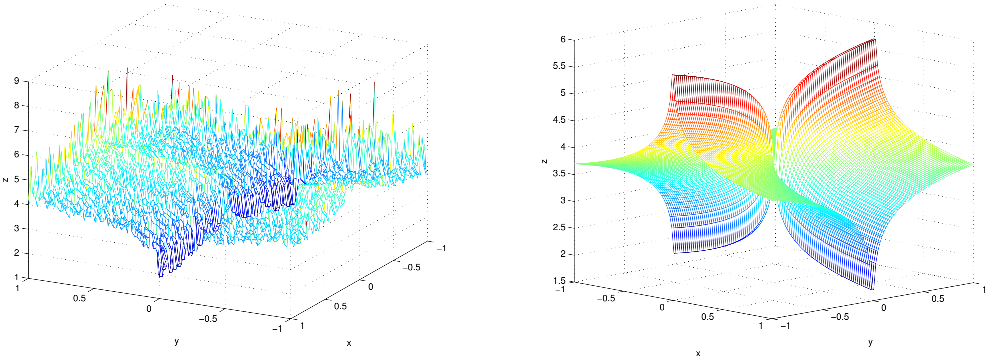
   Script koji crta trodimenzionalni grafik funkcije z nad oblašću $[-1, 1] \times [-1, 1]$, može biti sledeći

```
n=20;
z=@(x,y) exp(-x./y);
x=linspace(-1,1,n);
y=linspace(-1,1,n);
[x,y]=meshgrid(x,y);
mesh(x,y,z(x,y));
```

Rešenje. a) Script koji crta zahtevanu zavisnost može biti sledeći

```
n=100;
z=@(x,y) exp(-x./y);
x=linspace(-1,1,n);
xPrim=x.*(1+10^(-4)*(2*rand(1,n)));
y=linspace(-1,1,n);
yPrim=y.*(1+10^(-4)*(2*rand(1,n)));
[x,y]=meshgrid(x,y);
[xPrim,yPrim]=meshgrid(xPrim,yPrim);
mesh(x,y,-log10(abs(z(xPrim,yPrim)./z(x,y)-1)));
xlabel('x')
```

Slika 1 levo predstavlja grafik. Grafik ima pogled sa negativnog dela z, i sa grafika možemo očitati da je najveći gubitak značjanih cifara oko x ose, dok je najveća količina značajnih



Slika 1: Slika levo eksperimetnalno dobijeni broj značajnih cifara prilikom izračunavanja funkcije z, slika desno teorijski broj minimlnaog broja značajnih cifara prilikom izračunavanja funkcije z.

cifara za tačke koje se nalaze oko y ose. Dakle, oblast slabe uslovljenosti se nalazi oko x ose, a oblast dobre uslovljenosti izračunavanja se nalazi u okolini y ose.

b) Na osnovu izraza iz knjige znamo da važi

$$r_z = \left| \frac{z(x', y') - z(x, y)}{z(x, y)} \right| \leq \left| \frac{x}{z(x, y)} \frac{\partial z}{\partial x} \right| r_x + \left| \frac{y}{z(x, y)} \right| r_y = \left| \frac{x}{y} \right| r_x + \left| \frac{x}{y} \right| r_y = 2 \left| \frac{x}{y} \right| r,$$

jer pretpostavljamo da je gornja granica relativne greške ista za merenje veličina x i y, prema uslovu zadatka. Odvade dobijamo

$$z_z = -\log_{10} r_z \geq \log_{10} 2 - \log_{10} |x| + \log_{10} |y| + z_x \approx m - .3 - \log_{10} |x| + \log_{10} |y|,$$

gde su z_z i z_x značajne cifre u vrednosti funkcije z i promenljive x. Prema uslovu zadatka $m = z_x$.

Script koji crta grafik za $m = 4$, može biti sledeći

```
n=100;
x=linspace(-1,1,n);
y=linspace(-1,1,n);
[x,y]=meshgrid(x,y);
g=@(x,y) 4-.3-log10(abs(x))+log10(abs(y));
mesh(x,y,g(x,y));
xlabel('x');
ylabel('y');
zlabel('z');
```

c) Vidimo da se rezultati slažu oba grafika pokazuju slabu uslovljenost oko x ose i dobru uslovljenost oko y ose. Ako posmatramo izraz za broj značajnih cifara u vrednosti funkcije z

$$z_z \geq 3.7 - \log_{10} |x| + \log_{10} |y|,$$

možemo zaključiti da desna strana raste kako se $|x|$ približava vrednosti nula, dok opada kako se $|y|$ približava vrednosti nula. Dakle, broj značajnih cifara raste sa opadanjem $|x|$ ka nuli, drugim rečima što je $|x|$ bliža nuli to je broj značajnih cifara veći. Zaključujemo da je oblast dobre uslovljenosti u okolini y ose. Sa druge strane broj značajnih cifara opada što je $|y|$ bliža nuli. Zaključujemo da je oblast dobre uslovljenosti u okolini x ose.

2. Pretpostavimo da rešavate sistem linearnih jednačina čija je matrica Vandermondeova, dakle, neka je sistem linearnih jednačina zadat sa

$$Ax = b, \quad A_n(t) = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \dots & t_2^{n-1} \\ 1 & t_3 & t_3^2 & \dots & t_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \dots & t_n^{n-1} \end{bmatrix}, \quad t = (t_1, \dots, t_n), \quad x = (1, 1, 1, \dots, 1).$$

a) Nacrati grafik zavisnosti broja značajnih cifara u rešenju sistema linearnih jednačina u funkciji reda matrice n. Grafik nacrtati za vrednosti n koje pripadaju skupu $\{5k \mid k = 1, \dots, 10\}$. Elemente vektora t birati na slučajan način iz intervala $[-10, 10]$. Odrediti približno red sistema linearnih jednačina za koji je broj značajnih cifara u rešenju jednak nula.

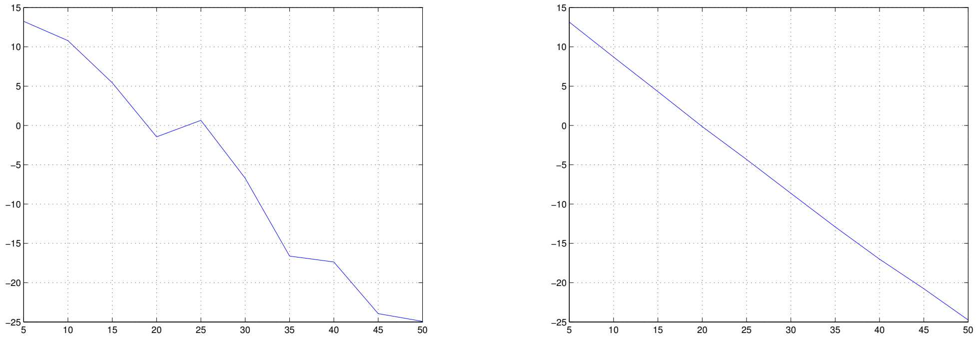
b) Na osnovu postupka izloženog pod a, pri čemu elementi vektora t pripadaju intervalima $[-1 - 5k, 1 + 5k]$, $k = 0, \dots, 10$, odrediti približno najmanji red sistema linearnih jednačina n koji ima nula značajnih cifara u rešenju. Prikazati grafički zavinost reda sistema linearnih jednačina u funkciji dužine intervala kojem pripadaju elementi vektora t, dakle od k.

c) Na osnovu dobijenih rezultata i koristeći izraz za ocenu greške prilikom rešavanja sistema linearnih jednačina obrazložiti da faktor uslovljenosti Vandermondeove matrice raste sa porastom dužine intervala kome pripadaju elementi vektora t.

Funkcija koja konstruiše Vandermondeovu matricu u matlabu zadati vektor t je `vander`.

Rešenje. a) Script koji se može koristiti za dobijnje grafika je

```
sig=zeros(10,1);
for n=5:5:50
    t=20*rand(n,1)-10;
    A=vander(t);
    x=ones(n,1);
    b=A*x;
    xPrim=linsolve(A,b);
    sig(n/5)=-log10(norm(xPrim-x)/norm(x));
end
plot(5:5:50,sig);
grid on;
```



Slika 2: Slika levo broj značjanih cifara u rešenju jedna realizacija, slika desno broj značjanih cifara u rešenju 1000 realizacija.

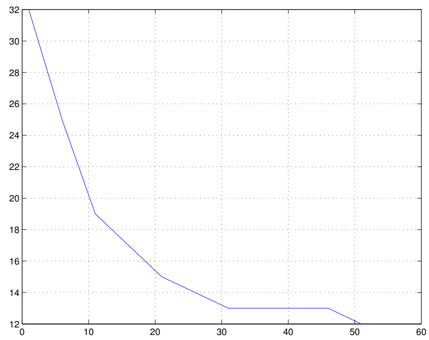
Dobijeni grafik je prikazan na slici 2 levo. Vidimo da broj značajnih cifara opada u rešenju kako raste red Vandermondeove matrice. Medjutim, bolje rezultate za analizu dobiti ako usrednjimo po više realizacija slučajnog procesa. U suštini samo treba veliki broj puta realizovati Vandermondeovu matricu i broj značajnih cifara usrednjiti po realizaciji. Script koji izvršava pomenutu metodu može biti sledeći

```
sig=zeros(10,1);
brojRealizacija=1000;
for k=1:brojRealizacija
    for n=5:5:50
        t=20*rand(n,1)-10;
        A=vander(t);
        x=ones(n,1);
        b=A*x;
        xPrim=linsolve(A,b);
        sig(n/5)=sig(n/5)-log10(norm(xPrim-x)/norm(x));
    end
end
plot(5:5:50,sig/brojRealizacija);
grid on;
```

Jednina ralzika u odnosu na prethodni script je petlja po `k` koja u suštini omogućava više reazliacija vektora `t`. Naravno, sabiramo broj značajnih cifara u svakoj realizaciji i na kraju ih usrednjimo sa brojem realizacija. Slika 2

U suštini slike 2 se ne razlikuju mnogo, ali je desna preciznija jer odslika ponašanje ansambla realizacija, dok leva slika slika bira jednu realizaciju i sa njom redi. Očigledno možemo uzeti da je vrednost reda matrice za koju dobijamo nula značajnih cifara u rešenju približno $n(10) = 20$. Notacija $n(10)$ znači da posmatramo n u fukciji dužine intervala.

b) Za rešenje ovog dela zadatka, prosto konstruišemo slike za razne vrednosti intervala kojima pripadaju elementi vektora `t` i odredimo red sistema linearnih jednačina pri kome



Slika 3: Slika levo zavinost reda sistema linearnih jednačina u funkciji dužine intervala iz kog se biraju elementi vektora t, slika desno

rešenje ima nula značajnih cifara. Ako koristimo usrednjavanje po anasamblu dobijamo sliku prikaznu na siici 3 levo. Ako niste koristili više realizacija Vandermondeove matrice i usrednjavanje po ansamblu, dobili ste grafik koji možda malo odstupa od prikazanog ali je u suštini njemu približan.

c) Izraz koji daje zavisnost broja značajnih cifara rešenja u funkciji broja značajnih cifara matrice sistema i značajnih cifara slobodnog vektora iz knjige je

$$r_x \leq \frac{2k(A)}{1-r} \max\{r_A, r_b\}, \quad r = ||\Delta A||\,||A^{-1}||.$$

Pretpostavićemo da je uslov važenja formule ispunjen, odnosno da važi $r < 1$. Kako su nama relativne greške matrice sistema i slobodnog vektora sistema približno 10^{-16}, možemo dobiti

$$z_x = -\log_{10} r_x \geq 16 - \log_{10} 2 - \log_{10} k(A) - \log_{10}(1-r),$$

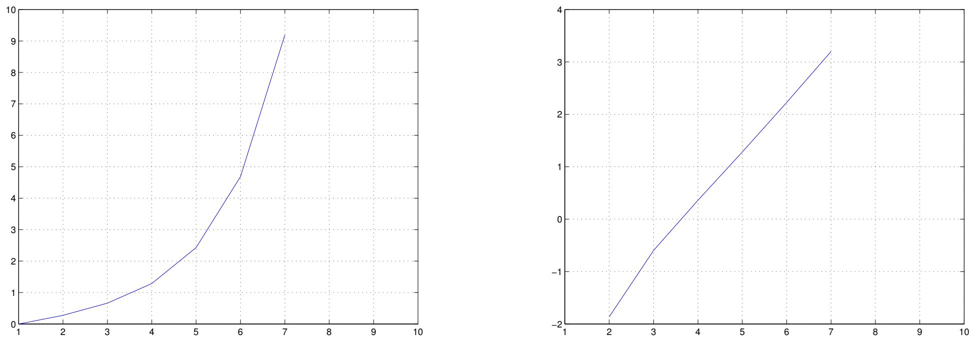
ako pretpostavimo da je $r << 1$, možemo pisati

$$z_x \geq 15.7 - \log_{10} k(A).$$

Znači da je grafik prikazan na slici u stvari grafik koji priazuje zavisnost reda sistema linearnih jednačina u funkciji dužine intervala kad faktor uslovljenosti matrice postane jednak približno $10^{15.7}$. Vidimo da što je veća dužina itervala to je potreban manji red sistema za postizanje faktora uslovljenosti priližne vrednosti $10^{15.7}$. Kako generalno sa porastom reda faktor uslovljenosti matrice raste, možemo na osnovu izloženog zaključiti i da faktor uslovljenosti raste sa porastom dužine intervala.

3. Posmatrajmo iterativni proces

$$x_{k+1} = \phi(x_k), \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad x_0 = 2,$$



Slika 4: Slika levo zavisnost broja značajnih cifara u funkciji broja iteracija, slika desno zvisnost logaritma broja značajnih cifara u funkciji broja iteracija

gde je iterativna funkcija zadata sa

$$\phi(x) = \frac{3x^4 + 1}{4x^3}.$$

a) Pod pretpostavkom da niz x_k konvergira ka vrednosti 1, nacrati broj značajnih cifara u funkciji k. Odrediti na osnovu grafika red konvergencije iterativnog procesa. Najjednostavnije je posmatrati grafik $\log(z_k)$, gde je z_k broj značajnih cifara u iteraciji k.

b) Pokazati analitički da je red konvergencije iterativnog procesa 2.

c) Odrediti teorijski broj iteracija potreban za dostizanje mašinske tačnosti. Uporediti ovaj broj iteracija sa eksperimentalno dobijenim rezutlatom pod a.

Rešenje. Script koji crta broj značajnih funkcija u funkciji broja iteracija, kao i logaritam broja značjanih cifara u funkciji broja iteracija može biti sledeći

```
phi=@(x) (3*x^4+1)/(4*x^3);
x=[2];
for i=2:10
    x=[x phi(x(end))];
end
sig=-log10(abs(x-1));
plot(1:10,sig);
grid on;
figure;
plot(1:10,log2(sig));
grid on;
```

Slika 4 levo prikazuje dobijeni grafik. Sa slike vidimo da funkcija $\log_2(z_k)$ ima linearu zavisnost od broja iteracija. Izraz za broj značajnih cifara iz iteracije u iteraciju, na osnovu knjige, je

$$z_{k+1} = C + rz_k,$$

gde je r red iterativnog procesa. Sa slike vidimo da je u prvoj iteraciji taj broj nula, tako da i konstanta približno iznosi nula. Ako na tako promenjenu jednačinu primenimo $\log_2$, dobijamo sliku **??** desno. Vidimo da je imamo linearnu zavisnost, opisanu sa

$$\log_2 z_{k+1} \approx \log_2 r + \log_2 z_k \approx 2\log_2 r + \log_2 z_{k-1},$$

što u suštini znači da nagib grafika predstavlja $\log_2 r$. Sa slike 4 desno vidimo da je nagib približno jedan, recimo uporedite vrednosti za $k = 5$ i $k = 6$, što znači da važi

$$\log_2 r \approx 1 \Rightarrow r \approx 2.$$

b) Analitički red metoda možemo odrediti na sledeći način

$$\phi'(x) = \frac{3}{4}\frac{x^4 - 1}{x^4}, \quad \phi'(1) = 0, \quad \phi''(x) = \frac{3}{x^5}, \quad \phi''(1) = 3.$$

Vidimo da je red proces dva i da važi

$$\lim \frac{x_{k+1} - 1}{(x_k - 1)^2} = \frac{1}{2!}\phi''(1) = \frac{3}{2}.$$

Odavde možemo zaključiti da je

$$z_{k+1} \approx -\log_{10}\frac{3}{2} + 2z_k \approx -.18 + 2z_k.$$

Pretpostavka nam je bila tačna konstanta ima zaista malu vrednost $-.18$, što potvrdjuje tačnost razmatranja u delu pod a.

c) Broj iteracija potreban za dostizanje mašinkse tačnosti možemo odrediti polazeći od pretpostavke da druga iteracija ima jednu značajnu cifru. Onda dobijamo sledeću tabelu Kako vidimo u sedmoj iteraciji bi imali 26.42 značajnih cifara, što je naravno nemoguće

k	z_k
2	1
3	1.82
4	3.46
5	6.74
6	13.3
7	26.42

jer radimo u formatu `double`, pa možemo reći da je teorijski potreban broj otprilike sedam iteracija. Sa slike 4 levo, vidimo da se mašinska tačnost dostiže u osmoj iteraciji, što je posledica prilično loše startne vrednosti koja u drugoj iteraciji daje otprilike .2 značajne cifre.

5. a) Naći egzaktno rešenje Chauchyevog problema

$$y' = -y, \quad y(0) = 1.$$

b) Napisati funkcije u `Matlabu` koje aproksimiraju rešenje posmatranog Cauchyevog problema koristeći Eulerov metod

$$y_{n+1} = y_n + hf_n, \quad y_0 = y(0),$$

i implicitni metod

$$y_{n+3} - \frac{18}{11}y_{n+2} + \frac{9}{11}y_{n+1} - \frac{2}{11}y_n = \frac{6}{11}hf_{n+3},$$

vrednosti y_2, y_1 i y_0 odrediti na osnovu egzaktnog rešenja.

c) Nacrtati grafik zavisnosti broja značajnih cifara aproksimacije rešenja $y(1)$ u funkciji logaritma koraka $h = 2^{-k}$, $k = 1, \ldots, 15$. Oceniti na osnovu grafika red upotrebljenog implicitnog metoda.

d) Nacrtati grafik zavisnosti broja značajnih cifara rešenja Cauchyevog problema, prilikom izračunavanja implicitnim metodom, na intervalu $[0, 4]$ za $h = 2^{-k}$, $k = 1, \ldots, 15$. Na osnovu grafika oceniti oblast stabilnosti implicitnog metoda.

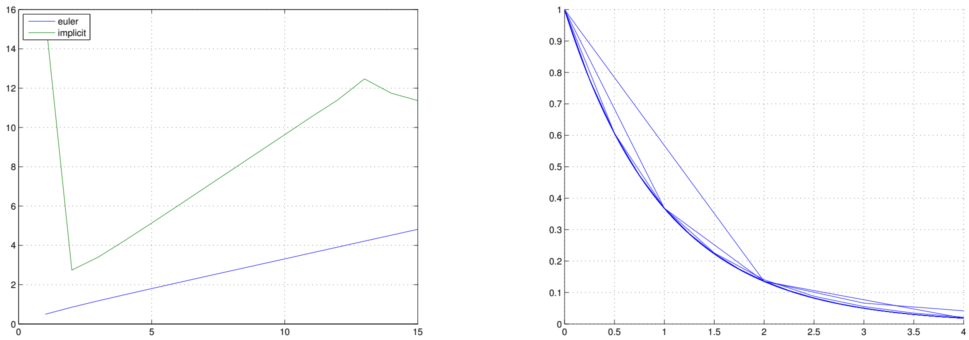
Rešenje. a) Egzaktno rešenje Cauchyevog problema je

$$y = e^{-x}.$$

b) Ako upotrebimo činjenicu da je $f(x, y) = -y$, funkcije koje implementiraju Eulerov metod i dati implicitni metod možemo napasti na sledeći način

```
function [x,y]=euler(b,n)
    h=b/n;
    y=ones(n+1,1);
    x=zeros(n+1,1);
    for i=2:(n+1)
        x(i)=(i-1)*h;
        y(i)=(1-h)*y(i-1);
    end
end
```

```
function [x,y]=implicit(b,n)
    h=b/n;
    y=ones(n+1,1);
    x=zeros(n+1,1);
    y(2)=exp(-h);
    x(2)=h;
```



Slika 5: Slika levo broj značajnih cifara u vrednosti $y(1)$ eulerovim i implicitnim metodom, slika desno

```
    y(3)=exp(-2*h);
    x(3)=2*h;
    for i=4:(n+1)
        x(i)=(i-1)*h;
        y(i)=1/(11+6*h)*(18*y(i-1)-9*y(i-2)+2*y(i-3));
    end
end
```

c) Script kojim se mogu nacratati zahtevani grafici mo ze biti sledeći

```
yJedanE=zeros(15,1);
yJedanI=zeros(15,1);
b=1;
for i=1:15
    n=2^(i);
    [x,y]=euler(b,n);
    yJedanE(i)=-log10(abs(y(end)*exp(1)-1));
    [x,y]=implicit(b,n);
    yJedanI(i)=-log10(abs(y(end)*exp(1)-1));
end
plot(1:15,yJedanE,1:15,yJedanI);
legend('euler','implicit','location','northwest');
grid on;
```

Slika koja se dobija upotrebom scripta prikazana je na slici 5 levo. Sa slike možemo oceniti red metoda. Posmtrajmo vrednosti za $-\log_2 h = 5$ i $-\log_2 h = 10$. Eulerov metod ima približno 1.7 i 3.3 značajnih cifara. Dok implicitni metod ima približno 5 i 9.5 značajnih cifara. Kako je broj značajnih cifara otprilike

$$z \approx C + p \log_{10} h,$$

gde je p red metoda, videti knjigu. Možemo zaključiti da za Eulerov metod važi

$$p \approx \frac{3.3 - 1.7}{\log_{10} 2^{-10} - \log_{10} 2^{-5}} \approx 1.06$$

dok za implicitni metod važi

$$p \approx \frac{9.5 - 5}{\log_{10} 2^{-10} - \log_{10} 2^{-5}} \approx 2.99$$

Dati implictni metod je trećeg reda, dok je Eulerov metod reda jedan.

Primetićete i zanimljivost vezanu za metod reda sa previše malim korakom. Za $-\log_2 h > 13$, ne dolazi do povećanja značjanih cifara u rešenju, naprotiv dolazi do opadanja broja značajnih cifara u rešenju.

d) Script koji crta zahtevane grafike može biti

```
figure;
hold on;
b=4;
for i=1:15
    n=2^(i);
    [x,y]=implicit(b,n);
    plot(x,y);
end
grid on;
```

Dobijena slika je prikazana na slici 5 desno. Sa slike vidimo da rešenja po smislu prate stvarno rešenje diferencijalne jednačine, što u suštini znači da pomenute vrednosti koraka ulaze u region stabilnosti metoda. U suštini, prikazani metod je metod trećeg reda iz familije metoda sa diferenciranjem unazad, videti knjigu, i ima interval stabilnosti $(-\infty, 0]$.

prof. dr Aleksandar Cvetković