

КИНЕМАТСКЕ ВЕЛИЧИНЕ ЦИЛИНДРИЧНИХ ЗУПЧАСТИХ ПАРОВА

Кинематским величинама дефинише се зупчасти пар. Оне се одређују на основу геометријских величина спрегнутих зупчаника у **чеоној равни**. Кинематске величине зупчастог пара су:

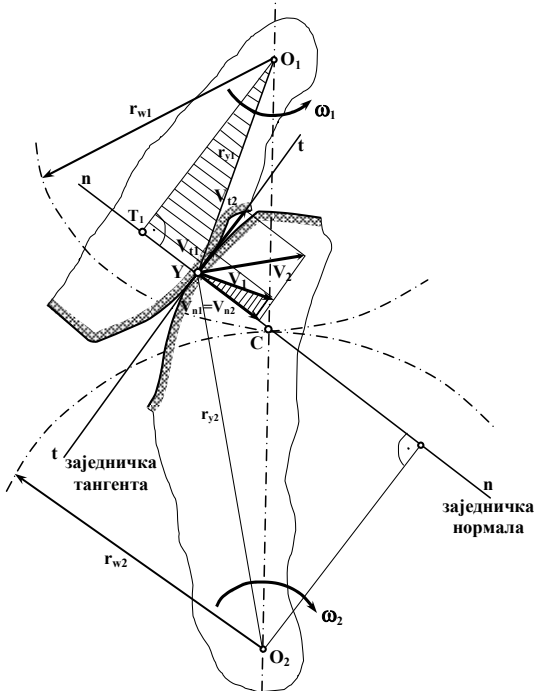
- кинематски (i) или радни преносни однос (i)
- осно растојање (a)
- пречници кинематских кругова (d_{w1}, d_{w2})
- угао додирнице (α_w)
- кружни зазор (j)
- темени зазор (c)
- степен спрезања профила (ε_a)

Темени пречник зупчаника одређује се на основу кинематских (a и c) и геометријских величина (d_f). Сагласно овоме, она представља кинематско-геометријску карактеристику зупчастих парова.

Два цилиндрична зупчаника се могу спрегнути – формирати зупчасти пар ако су испуњени следећи услови:

- израђени **истим алатом** или, једноставније речено, имају **исти модул**, пошто је код свих алата обично $\alpha_n = 20^\circ$; $y_n = 1,0$; $c_n = 0,1 \dots 0,3$;
- имају **исти угао нагиба бочне линије зупца**, и
- имају **различите смерове нагиба бочне линије зупца**, код косих зубаца.

У току преношења обртног кретања и оптерећења (обртног момента) са једног зупчаника на други, спрезање (додиривање) зубаца остварује се у **ограниченом угаоном интервалу обртања посматраних зупчаника**. При томе, тачка додира Y на профилима зубаца погонског зупчаника помера се од подножја ка темени – врху зупца, а код гоњеног зупчаника, помера се од врха ка подножју зупца.



Спрезање цилиндричног зупчастог пара

Да би се профили зубаца исправно спрезали, они морају у свакој тачки додира имати заједничку тангенту и заједничку нормалу. Најкраћим растојањем заједничке нормале од осе обртања O_1 и O_2 , одређени су полупречници r_{b1} и r_{b2} (полупречници основних кругова). **За континуално преношење кетања и оптерећења са погонског на гоњени зупчаник потребно је обезбедити да профили спрегнутих зубаца стално буду у додиру.**

У кинематском смислу, овај услов ће бити испуњен ако су брзине профила зубаца у додирној тачки Y у правцу заједничке нормале међусобно једнаке:

$$V_{n1} = V_{n2}$$

Обимне брзине спрегнутих профила зубаца у посматраној тачки додира Y су:

$$V_1 = r_{y1} \cdot \omega_1$$

$$V_2 = r_{y2} \cdot \omega_2$$

Из сличности троуглова O_1NC и O_2NC може се показати да је

$$\frac{r_{b2}}{r_{b1}} = \frac{\overline{O_2C}}{\overline{O_1C}}$$

Из једнакости брзина у правцу заједничке нормале добија се израз за **кинематски преносни однос зупчастог пара**:

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_{b2}}{d_{b1}} = \frac{\overline{O_2C}}{\overline{O_1C}} = \frac{d_{w2}}{d_{w1}}$$

Закључак:

Еволвентни профили спрегнутих зубаца у свакој тачки додира имају заједничку нормалу која увек пролази кроз кинематски пол C . Истовремено, сагласно дефиницији еволвенте круга, заједничка нормала тангира основне кругове спрегнутих зупчаника. На заједничкој нормали леже све тачке додира профила спрегнутих зубаца. Посматрано у односу на непокретан координатни систем, скуп свих ових тачака додира профила спрегнутих зубаца **формира додирницу профила зубаца**. Теоријски, њена максимална дужина одговара растојању $\overline{N_1N_2}$. Положај – правац додирнице профила зубаца дефинисан је углом додирнице.

Угао додирнице (α_w) је угао између додирнице профила зубаца и тангенте на кинематске кругове.

Због одступања облика радних површина од кинематских површина. Код зупчастих парова, ако код ожељбљених фрикционих парова, постоји **кинематско клизање**.

Брзина клизања бокова зубаца има правац тангенте на профиле у посматраној тачки додира. Њен интензитет једнак је разлици брзина спрегнутих профила зубаца у правцу тангенте:

$$V_{kl} = |V_{t1} - V_{t2}|$$

Може се показати, да је брзина клизања пропорционална удаљености додирне тачке на профилима зубаца, од кинематског пола, тачке C :

$$V_{kl} = \overline{YC} \cdot (\omega_1 + \omega_2)$$

где је:

$$(\omega_1 + \omega_2) = \omega_{rel} \quad - \quad \text{релативна угаона брзина једног зупчаника у односу на други}$$

Брзина клизања највећа је на темену и у подножју зупца. Смер брзине клизања се мења при проласку кроз кинематски пол.

Осно растојање цилиндричног зупчастог пара

- изражено преко пречника кинематских кругова:

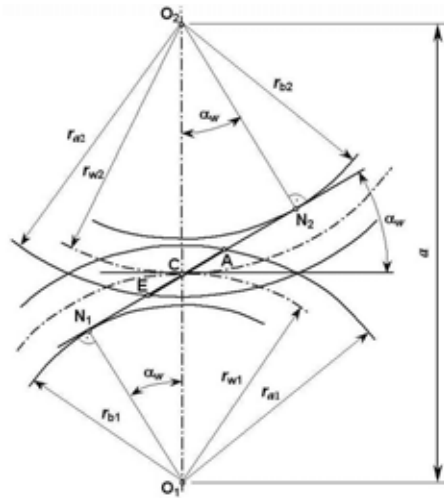
$$a = \frac{d_{\omega 1} + d_{\omega 2}}{2}$$

- изражено преко пречника основних кругова

$$a = \frac{d_{b1} + d_{b2}}{2} \frac{1}{\cos \alpha_{\omega}}$$

- изражено преко пречника подеоних кругова

$$a = \frac{d_1 + d_2}{2} \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w} = m \frac{z_1 + z_2}{2} \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w}$$

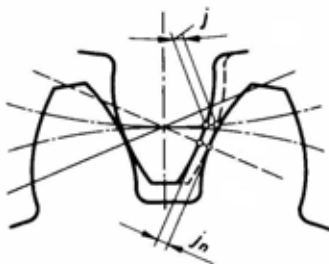


Додирница профила зубаца и угао додирнице

Цилиндрични зупчаници са аволвентним профилима зубаца, могу се правилно спрезати на различитим осним растојањима.

При промени осног растојања зупчастог пара мањају се:

- угао додирнице (α_w),
- кинематски пречници ($d_{\omega 1}$ и $d_{\omega 2}$),
- кружни зазор (j) и
- темени зазор (c)



Бочни зазор: кружни –
нормални –

Темени зазор:

Због нетачности облика и димензија зубаца настале при: изради озубљења, грешака при монтажи, радијалног зазора у лежајима, еластичних деформација зубаца вратила, дебљине уљног слоја и топлотних дилатација, **ширина међузубља спрегнутог зубаца је већа од дебљине зупца**. Овај простор – **кружни бочни зазор** представља дужину лука на кинематском кругу који одговара углу закретања једног зупчаника у односу на други који мирује, док се не додирну "нерадни" бокови зубаца.

Вредности кружног зазора зависе од области примене зупчастог пара и величине стандардног модула.

Зазор између бокова зубаца мерен у правцу заједничке нормале-додирнице профила зубаца назива се **нормални бочни зазор** (j_n):

Номиналне – називне вредности осног растојања и угла додирнице одређују се из услова спрезања зубаца без бочног – кружног зазора. Потребан кружни зазор остварује се погодним избором одступања осног растојања и мере преко зубаца. Одступања осног растојања су позитивна а одступања мере преко зубаца су негативна.

Угао додирнице

Угао додирнице одређује се на основу претпоставке да је дебљина зубаца једног зупчаника једнака ширини међузубља зубаца спрегнутог зупчаника, тј. да је кружни зазор једнак нули:

$$s_{w1} = e_{w2}$$

$$s_{w2} = e_{w1}$$

Израз за корак на кинематском кругу може се написати у облику:

$$p_{w1} = e_{w1} + s_{w1} \equiv e_{w2} + s_{w2}$$

На основу ове једнакости и горње претпоставке може се доћи до израза за угао додирнице без кружног зазора:

$$\text{inv} \alpha_w = 2 \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} \cdot \text{tg} \alpha + \text{inv} \alpha$$

У специјалном случају када су:

$$x_1 = x_2 = 0 \text{ и } x_1 + x_2 = 0$$

угао додирнице једнак је углу нагиба профила алата

$$\alpha_w = \alpha$$

а израз за осно растојање може се написати у облику:

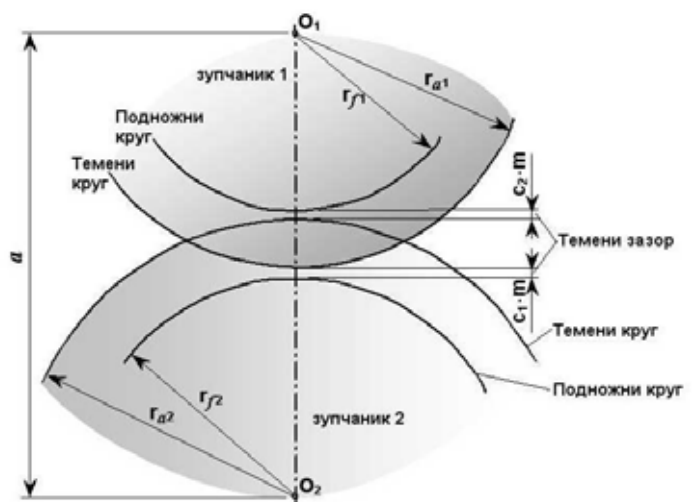
$$a = m \frac{z_1 + z_2}{2}$$

Пречници темених кругова и темени зазор

Пречником темених кругова одређен је највећи пречник на полуфабрикату-будућем зупчанику. Темени пречници спрегнутих зупчаника, који имају пречнике подножних кругова d_{f1} и d_{f2} , одређују се на основу жељеног осног растојања (a) и жељеног теменог зазора ($c_1 m$) и ($c_2 m$).

$$d_{a1} = 2a - d_{f2} - 2c_1 \cdot m$$

$$d_{a2} = 2a - d_{f1} - 2c_2 \cdot m$$



Пречници темених кругова спрегнутих зупчаника

Темени зазор представља најмање радијално растојање између темене површине једног зупчаника и подножне површине другог-спрегнутог зупчаника. Зато се у литератури може наћи и назив **радијални зазор**. Величина зазора изражава се производом модула зупчаника (m) и коефицијентом теменог зазора (c). Вредности коефицијента теменог зазора налазе се у границама

$$0,1 \leq c \leq 0,3$$

У општем случају ови коефицијенти могу бити различити:

$$c_1 \neq c_2$$

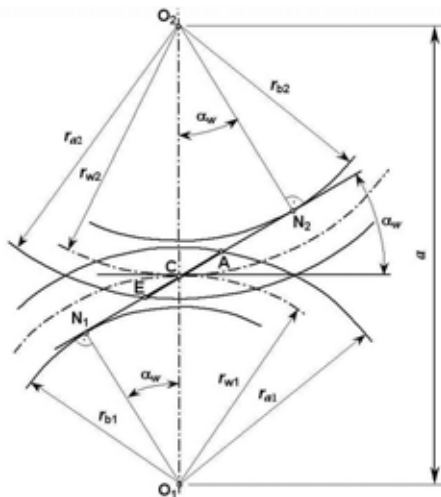
Обично се узима да су једнаки:

$$c_1 \equiv c_2 \approx 0,2$$

Задатак теменог зазора је да акумулира топлотне дилатације, нетачности при изради зубаца и монтажи зупчастог пара. Такође овај зазор представља простор – резервоар за прикупљање уља истиснутог из спреге зубаца.

Степен спрезања профила

Спрегнути еволвентни профили у свакој тачки додира имају заједничку нормалу, која увек пролази кроз кинематски пол C . На заједничкој нормали леже све тачке додира профила спрегнутих зубаца. Сагласно дефиницији еволвенте круга, заједничка нормала тангира основне кругове спрегнутих, зупчаника у тачкама N_1 и N_2 . Теоријски посматрано и ове тачке профила могу бити искоришћене при спрезању зубаца. У граничном случају на дужини $\overline{N_1 N_2}$ налазиле би се све теоријски могуће тачке додира једног зупчастог пара. Сагласно овоме растојање између тачака N_1 и N_2 , на заједничкој нормали спрегнутих профила, представља највећу дужину додирнице профила зубаца у литератури познате под називом – **корисна дужина додирнице**.



Додирница профила зубаца и угао додирнице

Због велике осетљивости еволвенте у околини тачака $\overline{N_1 N_2}$, овај део еволвенте се редовно избегава за спрезање зубаца. Почетно спрезање зубаца зупчастог пара налази се у пресеку теменог круга гоњеног зупчаника и додирнице профила зубаца, тачка E .

У овој тачки зубец погонског зупчаника започиње спрегу својим подножним делом а гоњени зупчаник својим теменим делом. У току спрезања зубаца тачка додира спрегнутих профила зубаца се креће од тачке E до тачке A . Крај спрезања се налази у пресеку теменог круга погонског зупчаника и додирнице профила зубаца, тачка A сл. 4,36. Дужина \overline{AE} представља стварну - **активну дужину додирнице**.

$$\ell = \overline{AE} = \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} + \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} - a \cdot \sin \alpha_o$$

Да би се обезбедило континуално преношење кретања и оптерећења са погонског на горњи зупчаник, активна дужина додирнице мора бити већа од корака зубаца на основном кругу. Односом активне дужине додирнице и корака на основном кругу дефинисан је степен спрезања профила зубаца:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{l}{p_b} > 1$$

У специјалном - граничном случају, када је степен спрезања профила једнак јединици:

$$\ell = p_b$$

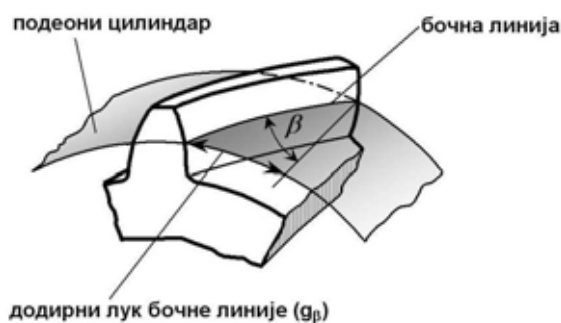
Код овог граничног случаја у току додирног периода налази се **само један** пар зубаца. Када он заврши додиривање, следећи пар зубаца, у истом тренутку, започиње свој додир. Овај гранични случај налаже апсолутно тачне и круте зупце, вратила и ослонце. У стварности степен спрезања профила је увек већи од јединице, а мањи од два, $1 < \varepsilon_\alpha < 2$.

Када је $1 < \varepsilon_\alpha < 2$, на почетку спрезања, тачка А и на крају спрезања, тачка Е, налазе се у додиру истовремено два пара зубаца (период двоструке спреге), а у средини додирног периода, око тачке С, налази се само један пар зубаца (период једноставне спреге). Са повећањем степена спрезања профила ($\varepsilon_\alpha \rightarrow 2$), повећава се период двоструке спреге а истовремено смањује период једноставне спреге. Када степен спрезања достигне вредност броја два нестаје период једноставне спреге, тако да су у додиру стално два пара зубаца.

Степен спрезања бочних линија и бокова

Код **цилиндричних зупчаника са косим зупцима** све тачке линије додира не почињу и не завршавају додиривање истовремено, као код цилиндричних зупчаника са правим зупцима. Зто је код цилиндричних зупчаника са косим зупцима дужина додирног периода зубаца већа за величину пројекције бочне линије зупца на чеону раван зупчаника (додирни лук бочне линије).

$$g_\beta = btg\beta$$



Бочна линија зупца и њен угао нагиба

Количником g_β додирног лука бочне линије и корака на подеоном кругу одређен је **степен спрезања бочних линија зубаца**:

$$\varepsilon_\beta = \frac{btg\beta}{p} = \frac{btg\beta}{m\pi}$$

Код цилиндричних зупчаника са косим зупцима **степен спрезања бокова** састоји се од **степен спрезања профила** (ε_α) и **степен спрезања бочних линија** (ε_β).

$$\varepsilon_\gamma = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta$$

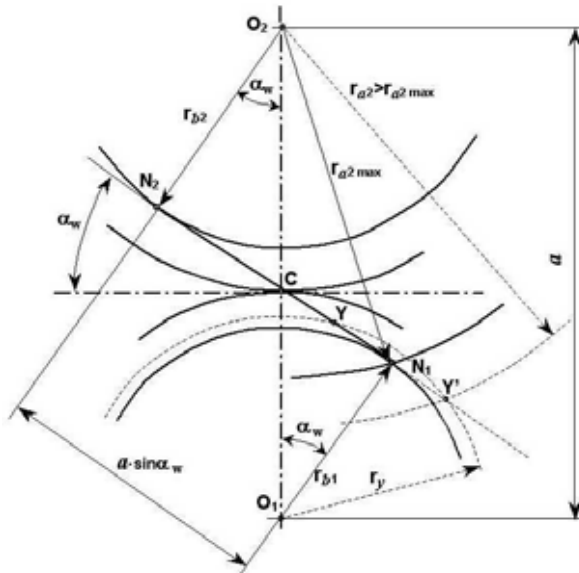
Код цилиндричних зупчаника са правим зупцима ($\beta=0$): $\varepsilon_\gamma = \varepsilon_\alpha$.

Интерференца

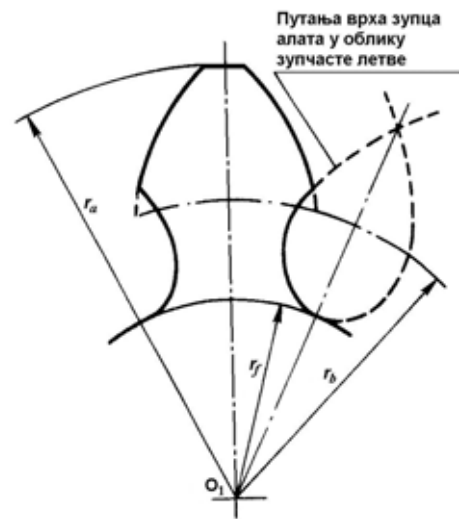
Све строжи захтеви у погледу масе и компактности машинских конструкција налажу израду зупчастих парова са што мањим осним растојањем. Сагласно овоме захтеву при изради зубаца зупчаника неопходно је искористити делове еволвенте који су блиски основном кругу, упркос њиховој великој осетљивости због малог радијуса кривине. **Гранични случај** настаје када се **активни део** додирнице профила зубаца поклапа се са **корисним делом**. ($l = \overline{N_1 N_2} = \alpha \cdot \sin \alpha_w$). Овом граничном случају одговара максимална вредност пречника теменог круга великог зупчаника:

$$d_{a2\max} = \sqrt{d_{b2}^2 + 4 \cdot a^2 \sin^2 \alpha_w}$$

Већа компактност зупчастог пара се може остварити, ако темени круг спрегнутих зупчаника пресеке заједничку нормалу профила зубаца изван корисног дела додирнице профила зубаца, изван дужи $\overline{N_1 N_2}$. То ће се догодити ако је $d_{a2} > d_{a2\max}$. Претпоставимо да је темени круг, великог зупчаника пресекао заједничку нормалу профила зубаца у тачки Y' . Круг малог зупчаника пречника d_y имао би две тачке пресека са додирницом профила зубаца. Једна тачка пресека Y налази се на корисном делу додирнице $\overline{N_1 N_2}$. У овој тачки профили зубаца се правилно додирују - спрежу, имају заједничку нормалу и тангенту. Друга тачка пресека је Y' . У овој тачки спрегнути профили зубаца се не додирују већ се секу (продире један у други). Услед преклапања путања спрегнутих профила зубаца, дошло би до заглављивања спрегнутих зубаца. Ова појава назива се **интерференца**.



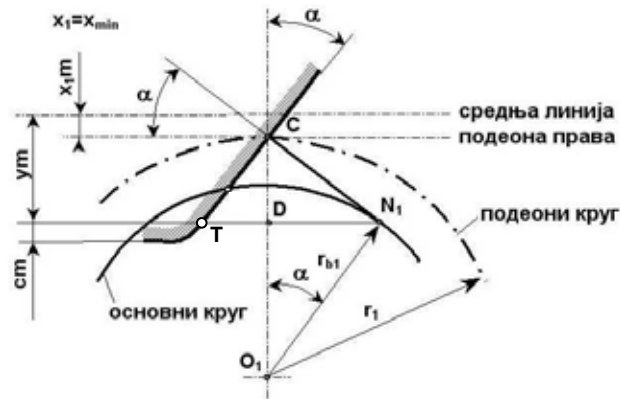
Спрезање зупчастог пара са и без интерференце



Подсецање профила зубаца

Граничне вредности коефицијента померања профила

Да би се и у случају интерференце обезбедило спрезање зубаца без појаве заглављивања, неопходно је одстранити део материјала у подножју зубаца, обично малог зупчаника. Овај вишак материјала се скида при спрезувању будућег зупчаника и алата - основне зупчасте летве. Зупци у подножном делу су подсечени. Ова појава доводи до смањења степена спрезања профила и запреминске чврстоће зубаца.



Спрезање алата и зупчаника у граничном случају

За практичну примену је веома важно познавати граничне - минималне вредности коефицијента померања профила при којима не долази до подсецања зубаца. До њих се долази посматрањем спрезања алата, основне зупчасте летве и зупчаника у граничном случају који је приказан на слици. Позиционирање алата према будућем зупчанику обавља се њиховим међусобним приближавањем, све док се почетак праволинијског дела профила алата (тачка Т) не поклапи са почетком еволвенте на основном кругу (тачка N_1).

На основу једнакости:

$$m \cdot x_{\min} = y \cdot m - \overline{CD} \quad \text{где је} \quad \overline{CD} = \frac{d_1}{2} - \frac{d_{b1}}{2} \cdot \cos \alpha$$

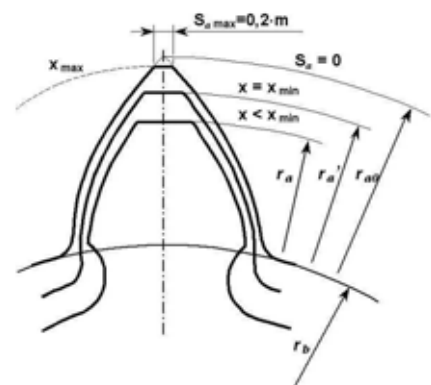
добија се израз за одређивање минималног коефицијента померања профила основне зупчасте летве (на граници интерференце):

$$x_{\min} = y - \frac{z}{2} \sin^2 \alpha$$

за $\alpha = 20^\circ$ и $x_{\min} = 0$ зупци зупчаника неће бити подсечени, ако је број зубаца $z \geq 17$.

Утицај померања профила на облик профила зубаца приказан је на слици.

- $x = x_{\min}$ - Зубац је на граници интерференце - подсецања,
- $x < x_{\min}$ - Зубац је подсечен: смањена је дебљина зупца у подножју и повећана дебљина зупца на теменој површини,
- $x > x_{\min}$ - Зубац је осигуран - удаљен од подсецања: повећана је дебљина зупца у подножју а смањена дебљина зупца на теменој површини,
- $x = x_{\max}$ - Одговара минимално дозвољеној лучној дебљини зупца на теменој површини $s_a = 0,2 m$
- $x > x_{\max}$ - Зубац је шиљаст, дебљина зупца на теменој површини је мања од $0,2 m$. У току спрезања може доћи до запреминског разарања - крзања врхова шиљастог зупца. Ова појава је нарочито изражена код термички обрађених-цементираних зубаца. Зато се препоручује да вредности дебљине зупца на теменој површини буду веће или једнаке $0,2 m$



Утицај коефицијента померања на облик профила зупца