2.7.3.2. Kinetička energija. Teorema kinetičke energije i integral energije

Za kretanje materijalne tačke pored količine kretanja i kinetičkog momenta — koji su vektorske veličine usko je vezana i jedna skalarna veličina koja takođe zavisi od brzine i mase. To je *kinetička energija* ili *živa sila* materijalne tačke. Ako je m masa tačke i $\mathbf{v}$ njena brzina, kinetička energija je definisana izrazom

$$T=\frac{1}{2}\,m(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})=\frac{1}{2}\,mv^2, \tag{1}$$

koji je još ranije (2.3—7) bio formalno uveden.

Diferencijaljenjem relacije (1) dobiva se diferencijal kinetičke energije, odnosno njen priraštaj uslovljen promenom brzine

$$dT = m\,\mathbf{v}\cdot d\mathbf{v} = mvdv. \tag{2}$$

Kako je

$$d\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}\,dt=\mathbf{w}\,dt \tag{3}$$

a sem toga $m\mathbf{w} = \mathbf{F}$, gde je $\mathbf{F}$ sila koja dejstvuje na posmatranu tačku, obrazac (2) se svodi na

$$dT = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}\,dt. \tag{4}$$

Kako je $\mathbf{v}\,dt = d\mathbf{r}$, biće najzad

$$dT = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}. \tag{5}$$

Skalarni proizvod sa desne strane znaka jednakosti u ovoj relaciji je prema (2.8.3—1) elementarni rad sile na pomeranju $d\mathbf{r}$ pa je

$$dT = dA. \tag{6}$$

Obrazac (6) predstavlja *teoremu kinetičke energije*: *Priraštaj kinetičke energije pri elementarnom pomeranju jednak je elementarnom radu sile koja dejstvuje na istom pomeranju.*

Diferencijal kinetičke energije u (6) jeste pravi difercnijal pa se integracijom iz (6) dobiva izraz za konačan priraštaj kinetičke energije i teorema kinetičke energije u konačnom obliku.

$$T-T_0=\int_{M_0}^{M} dA = A. \tag{7}$$

Ovde je $T-T_0$ konačna promena (priraštaj) kinetičke energije na putu od trenutka t_0, kada je brzina tačke v_0, do trenutka t kada je brzina v, a A je ukupan rad sile na tom putu. Teorema kinetičke energije sada glasi: *Konačna promena kinetičke energije na nekom putu jednaka je ukupnom radu koji izvrši sila na tom putu.*

Iz obrazaca (6) i (7) se vidi da kinetička energija i rad imaju jednake dimenzije pa se stoga i mere istim jedinicama.

Kad se materijalna tačka kreće u polju konzervativne sile iz teoreme kinetičke energije u obliku (7) neposredno proističe jedan prvi integral. U tom slučaju je $dA = \text{grad}\ U \cdot d\mathbf{r} = dU$ (2.7.3—17) pa se (7) svodi na

$$T - T_0 = U - U_0, \tag{9}$$

gde je U funkcija sile u položaju M a U_0 u položaju M_0 u kome kinetička energija ima vrednost T_0.

Veličina $T - U = T + V$ tj. zbir kinetičke i potencijalne energije predstavlja *ukupnu (totalnu) mehaničku energiju*, pa iz (7) proističe da je

$$T - U = T_0 - U_0 = h = \text{const.}, \tag{10}$$

ili

$$T + V = h$$

tj. *pri kretanju tačke u polju konzervativne sile ukupna energija je konstantna.* Relacija (10) predstavlja *zakon o održanju (konzervaciji) mehaničke energije* i naziva se i *integral energije.* Kretanje sa nepromenljivom ukupnom energijom naziva se *izoenergetsko.*

Kinetička i potencijalna energija i rad istih su dimenzija i mere se istim jedinicama. U polju konzervativne sile celokupan rad sile na nekom putu pretvara se u potencijalnu energiju jer je

$$\int_{M_0}^{M} dA = \int_{M_0}^{M} dU = U - U_0 = -(V - V_0)$$

i pri takvom kretanju nema gubitka energije (disipacije energije, rasipanja energije). Za takvo kretanje se još kaže da je *konzervativno.*

U praksi se za merenje energije najčešće koriste jedinice izvedene iz jedinica za merenje efekta rada. Prema (2.7.3.1—2) džul kao jedinica za rad može da se izrazi preko vata kao jedinice za efekt.

$$1\ \text{joule} = \text{W} \cdot \text{sec} = 10^7\ \text{erg},$$

odakle se izvodi jedinica za energiju *kilovatčas* (kWh)

$$1\ \text{kWh} = 10^3\ \text{joule} \cdot 3\,600\ \text{sec} = 3{,}6 \times 10^6\ \text{joule} \cdot \text{sec}. \tag{11}$$

2.7.3. Rad sile. Potencijal. Konzervativne sile

Pri pomeranju $d\mathbf{r}$ materijalne tačke pod uticajem sile $\mathbf{F}$ skalarni proizvod

(1) $$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

predstavlja *rad sile* $\mathbf{F}$ *na elementarnom pomeranju*, ili kratko *elementarni rad sile*. Elementarni rad sile u opštem slučaju nije totalni diferencijal, jer sila $\mathbf{F}$ može zavisiti od položaja $\mathbf{r}$, brzine $\dot{\mathbf{r}}$ i vremena t. Uvek se, međutim, može pisati $d\mathbf{r} = \mathbf{t}\, ds$ gde je $\mathbf{t}$ jedinični vektor tangente trajektorije, a ds lučni element trajektorije, tako da je

(2) $$dA = F_t \cdot ds, \qquad F_t \equiv \mathbf{F} \cdot \mathbf{t}.$$

Dimenzija rada je [sila $\times$ put], tj.

(3) $$[A] = ML^2\, T^{-2}.$$

Za jedinicu se u CGS sistemu mera uzima *erg*,

(4) $$1 \text{ erg} = \text{cm}^2 \text{ g sec}^{-2} = \text{dyn cm}.$$

Ova je jedinica za praktične tehničke potrebe mala pa se u praktičnom sistemu MKS uzima metarnjutn (mn) koji se naziva *džul* (joule),

(5) $$1 \text{ joule} = 10^7 \text{ erg}.$$

U tehničkom sistemu jedinica MKPS se za jedinicu rada uzima *metarkilopond* (mkp),

(6) $$1 \text{ mkp} = 9{,}81 \text{ joule} = 9{,}81 \times 10^7 \text{ cm}^2 \text{ g sec}^{-2}.$$

U Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu rad sile dat je izrazom

(7) $$dA = X\, dx + Y\, dy + Z\, dz.$$

Prema (1.2.1—7) i (1.11 i 12) je

$$d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{3} A_i\, dq^i\, \mathbf{t}_i,$$

tako da je u generalisanim koordinatama

$$dA = \sum_{i=1}^{3} A_i\, (\mathbf{F} \cdot \mathbf{t}_i)\, dq^i.$$

U (2.3—6) već je uvedena oznaka

(8) $$Q_i = A_i\, (\mathbf{F} \cdot \mathbf{t}_i)$$

za *generalisanu silu*. Prema tome, za elementarni rad u generalisanim koor tama se može napisati

$$dA = Q_i\, dq^i. \tag{9}$$

Pojedinačne generalisane koordinate Q_i sile ne moraju imati dimenziju sil proizvod koordinate sile Q_i i odgovarajuće kordinate dq^i elementarnog pome mora imati dimenziju rada.

Kada se tačka kreće duž neke krive linije L od položaja M_0 do nekog ložaja M na krivoj, sila $\mathbf{F}$ će izvršiti ukupan rad na tom putu

$$A = \int_{M_0}^{M} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \tag{10}$$

Prema tome, rad sile je određen krivolinijskim intergralom i zavisi od puta. su poznate konačne jednačine kretanja, recimo u generalisanim koordina $q^i = q^i(t)$, $(i = 1, 2, 3)$ i posmatra se kretanje od trenutka t_0 do nekog tren t, rad je određen izrazom

$$A = \int_{t_0}^{t} Q_i\, \dot{q}^i\, dt, \tag{11}$$

koji se u Dekartovim pravouglim koordinatama $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z =$ svodi na

$$A = \int_{t_0}^{t} (X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z})\, dt, \tag{12}$$

pri čemu su u prvom slučaju Q_i, a u drugom X, Y, Z funkcije od vremena t.

Sila u opštem slučaju zavisi od položaja, brzine i vremena. Međutim, zavisi *samo od položaja*, deo prostora u kome se posmatra sila je *polje sile* i u slučaju je $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$, ili u skalarnom obliku

$$Q_i = Q_i(q^1, q^2, q^3), \tag{13}$$

odn., u Dekartovim koordinatama

$$X = X(x, y, z), \quad Y = Y(x, y, z), \quad Z = Z(x, y, z). \tag{14}$$

Da rad neke sile ne zavisi od puta već samo od krajnjih tačaka M_0 i M putanji potrebno je i dovoljno da ta sila zavisi samo od položaja i da elen tarni rad bude totalni diferencijal neke skalarne funkcije $U(\mathbf{r})$, tj. da bude

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial U}{\partial q^i}\, dq^i, \tag{15}$$

što u Dekartovim koordinatama glasi

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial U}{\partial x}\, dx + \frac{\partial U}{\partial y}\, dy + \frac{\partial U}{\partial z}\, dz. \tag{16}$$

Izraz sa desne strane jednačine (16) može se napisati u obliku

$$\operatorname{grad} U \cdot d\mathbf{r}$$

pa je

$$\mathbf{F} = \operatorname{grad} U. \tag{17}$$

Prema tome rad neće zavisiti od puta već samo od početnog i krajnjeg položaja pokretne tačke, ako je sila gradijent neke skalarne funkcije samo od položaja. Ta skalarna funkcija se zove *funkcija sile* a skalar sa suprotnim znakom $V = -U$ je *potencijal sile* ili *potencijalna energija*. Sila koja ima takvu funkciju sile naziva se *konzervativna sila*.

Uslov da neka sila ima potencijal proističe iz identičnosti koja važi za proizvoljnu skalarnu funkciju U

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} U = \mathbf{0},$$

pa se može reći da je neka sila konzervativna ako zavisi samo od položaja i ako je

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}. \tag{18}$$

Uslov (18) u stvari predstavlja vektorski oblik uslova da linearni diferencijalni izraz

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

bude totalni diferencijal, tj. da koeficijenti uz diferencijale zaista predstavljaju parcijalne izvode neke skalarne funkcije U. U razvijenom obliku uslov (18) glasi u Dekartovim koordinatama

$$\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}=0, \tag{19}$$

tako da je

$$X=\frac{\partial U}{\partial x},\qquad Y=\frac{\partial U}{\partial y},\qquad Z=\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{20}$$

Da pod navedenim uslovima rad sile ne zavisi od puta već samo od početnog i krajnjeg položaja vidi se iz (10) i (16), jer je

$$\int_{M_0}^{M}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_{M_0}^{M}\operatorname{grad} U\cdot d\mathbf{r}=\int_{M_0}^{M} dU = U(\mathbf{r})-U_0(\mathbf{r}_0). \tag{21}$$

Ako funkcija sile U zavisi ne samo od položaja već eksplicitno i od vremena, $U = U(\mathbf{r}, t)$, polje sile ima *stacionarnu promenu* od tačke do tačke pri stalnoj vrednosti t i lokalnu promenu u istoj tački kada se vreme menja. Sila koja ima takvu funkciju sile zove se *potencijalna sila*, ali ona *ne mora biti konzervativna*.