Kinetička energija materijalnog sistema

Kinetička energija tačke je pozitivna skalarna veličina koja se definiše kao $E_k = \frac{1}{2} m V^2$, gde je m - masa tačke, a V intenzitet njene brzine. Kinetička energija materijalnog sistema predstavlja zbir kinetičkih energija pojedinih tačaka, tj.

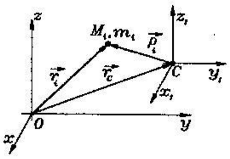
$$E_K = \sum_{i=1}^{n} E_{K_i} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i V_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\vec{V}_i \cdot \vec{V}_i\right).$$

Kinetička energija krutog tela, koje je podeljeno na elementarne deliće masa dm je

$$E_K = \frac{1}{2}\int_V V^2 dm .$$

Kenigova teorema

Neka se kretanje materijalnog sistema posmatra u odnosu na nepokretni koordinatni sistem $Oxyz$. Uvođenjem translatorno pokretnog koordinatnog sistema $Cx_1y_1z_1$,



položaj i-te tačke određen je sa $\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{\rho}_i$. Apsolutna brzina tačke je $\vec{V}_i = \dot{\vec{r}}_i = \vec{V}_C + \vec{V}_{r_i}$, pa je kinetička energija

$$E_K = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\vec{V}_i \cdot \vec{V}_i\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\vec{V}_C + \vec{V}_{r_i}\right)\cdot\left(\vec{V}_C + \vec{V}_{r_i}\right),$$

$$E_K = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i V_C^2 + 2\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{V}_C \cdot \vec{V}_{r_i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\vec{V}_{r_i} \cdot \vec{V}_{r_i}\right),$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i V_C^2 = \frac{1}{2} V_C^2 \sum_{i=1}^{n} m_i = \frac{1}{2} m V_C^2,\quad \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{V}_C \cdot \vec{V}_{r_i} = \vec{V}_C \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{\rho}_i}{dt} = 0,$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\vec{V}_{r_i} \cdot \vec{V}_{r_i}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i V_{r_i}^2,\quad E_K = \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i V_{r_i}^2$$

$$E_K = \frac{1}{2} m V_C^2 + E_{K_{rel}},$$

što predstavlja Kenigovu teoremu: Kinetička energija materijalnog sistema jednaka je zbiru kinetičke energije centra masa, kao da je u njemu skoncentrisana masa celog sistema, i kinetičke energije relativnog kretanja materijalnog sistema u odnosu na centar masa.

Kinetička energija tela koje se kreće translatorno

U slučaju translatornog kretanja tela važi da je $\vec{V}_i = \vec{V}_C$ pa je kinetička energija $E_K = \frac{1}{2} V^2 \int_V dm = \frac{1}{2} m V^2$. Isti izraz može se dobiti i iz Kenigove teoreme. U slučaju translatornog kretanja tela je $\vec{V}_r = 0$, pa je $E_K = \frac{1}{2} m V_C^2 = \frac{1}{2} m V^2$.

Kinetička energija tela koje se obrće oko nepokretne ose

Neka se telo obrće oko nepokretne ose Oz. Brzina uočenog elementa mase dm je $V = r_z \omega_z$, gde je r_z - rastojanje uočenog elementa od ose obrtanja, a ω_z - ugaona brzina tela. Tada je

$$E_K = \frac{1}{2}\int_V V^2 dm = \frac{1}{2}\int_V (r_z\omega_z)^2 dm = \frac{1}{2}\omega_z^2 \int_V r_z^2 dm = \frac{1}{2} J_z \omega_z^2 .$$

Kinetička energija tela koje vrši ravno kretanje

Koristeći Kenigovu teoremu $E_K = \frac{1}{2} m V_C^2 + E_{K_{rel}}$, i uočavajuću delić mase tela, važi $E_{K_{rel}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i V_{r_i}^2$. Kako je brzina uočenog delića $V_{r_i} = \rho_i \omega$, gde je ρ_i rastojanje delića od centra masa, a ω ugaona brzina tela, dobija se

$$E_{K_{rel}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i (\rho_i \omega)^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i \rho_i^2 .$$

Graničnim procesom kada $N \to \infty$, sledi $E_{K_{rel}} = \frac{1}{2} J_{C_\xi} \omega^2$, gde je sa J_{C_ξ} označen aksijalni moment inercije tela za pokretnu osu koja prolazi kroz centar masa i upravna je na ravan kretanja tela. Tada je

$$E_K = \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2} J_{C_\xi} \omega^2 .$$

Kinetička energija tela koje se obrće oko nepokretne tačke

Brzina uočenog delića tela, mase Δm_i, je $\vec{V}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i = \omega(\vec{\omega}_0 \times \vec{r}_i)$, gde je $\vec{\omega}$ - trenutna ugaona brzina tela, $\vec{r}_i$ - vektor položaja uočenog delića tela, u odnosu na nepokretnu tačku, a $\vec{\omega}_0$ - jedinični vektor trenutne ose obrtanja Op. Kinetička energija delića tela je $\Delta E_{K_i} = \frac{1}{2}\omega^2 (\vec{\omega}_0 \times \vec{r}_i)^2 \Delta m_i$. Uvođenjem oznake $(\vec{\omega}_0 \times \vec{r}_i)^2 = d_{p_i}^2$, gde je d_{p_i} - rastojanje delića od trenutne ose obrtanja, uzimajući da $N \to \infty$, dobija se

$$E_K = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \Delta E_{K_i} = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}\omega^2 d_{p_i}^2 \Delta m_i = \frac{1}{2}\omega^2 \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} d_{p_i}^2 \Delta m_i = \frac{1}{2}\omega^2 \int_V d^2 dm = \frac{1}{2} J_{O_p} \omega^2$$

gde je J_{O_p} - promenljivi moment inercije tela u odnosu na trenutnu osu obrtanja Op.

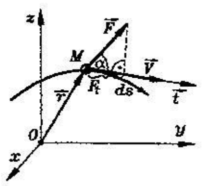
Kinetička energija tela koje vrši opšte kretanje

Opšte kretanje tela može se razložiti na prenosno translatorno i relativno kretanje koje predstavlja obrtanje oko trenutne ose obrtanja. Koristeći Kenigovu teoremu, tj. da je kinetička energija $E_K = \frac{1}{2} m V_C^2 + E_{K_{rel}}$, i uzimajući u obzir da je relativno kretanje obrtanje oko nepokretne tačke, pri čemu je u tom slučaju izraz za kinetičku energiju $E_K = \frac{1}{2} J_{C_p} \omega^2$, tada je kinetička energija tela koje vrši opšte kretanje

$$E_K = \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2} J_{C_p} \omega^2 .$$

Elementarni rad sile

Neka se tačka M kreće pod dejstvom sile $\vec{F}$ po putanji proizvoljnog oblika. Rad sile $\vec{F}$ na elementarnom pomeranju $d\vec{r}$ tačke ili elementarni rad sile δA jednak je skalarnom proizvodu sile $\vec{F}$ i elementarne (beskonačno male) promene vektora položaja te tačke, tj.



$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \delta A = \vec{F} \cdot \vec{V} dt, \quad \delta A = \vec{V} \cdot d\vec{I},$$

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{ds} ds = \vec{t} ds, \quad \delta A = \vec{F} \cdot \vec{t} ds .$$

Iz prethodnih razmatranja vidi se da je

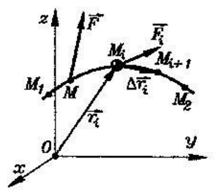
$$\delta A \begin{cases} > 0, & 0 \le \alpha \le 90^o \\ = 0, & \alpha = 90^o \\ < 0, & 90^o < \alpha \le 180^o . \end{cases}$$

Ako se $\vec{F}$ i $d\vec{r}$ izraze u odnosu na Dekartov pravougli koordinatni sistem $Oxyz$ $\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$, $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$, tada je elementarni rad sile

$$\delta A = Xdx + Ydy + Zdz .$$

Rad sile

Ukupni rad sile, ili samo rad sile, koja deluje na tačku, predstavlja rad sile pri konačnom pomeranju tačke po putanji. U cilju određivanja rada sile posmatra se kretanje tačke M pod dejstvom sile $\vec{F}$, po putanji proizvoljnog oblika. Ako se deo putanje tačke između dva njena proizvoljna položaja M_1 i M_2 izdeli se na n delova,



dobija se poligonalna linija. Analogno definiciji elementarnog rada sile može se uvesti mera dejstva sile $\vec{F}_i$, pri malom konačnom pomeranju tačke iz položaja M_i u položaj M_{i+1}, koja je određena sa $\vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i$, $(i = 1,2,...,n)$, gde je $\vec{F}_i$ - sila koja deluje na tačku M kada se ona nađe u položaju M_i i gde je $\Delta\vec{r}_i$ - priraštaj vektora položaja $\vec{r}$ tačke između njenih položaja M_i i M_{i+1}. Ukupna mera dejstva sile $\vec{F}$, pri pomeranju tačke M iz položaja M_1 u položaj M_2, duž poligonalne linije, je $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \Delta\vec{r}_i$. Graničnim prelazom, tj. $n \to \infty$ dolazi se do $A_{M_1M_2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i$, koja predstavlja rad sile $\vec{F}$, na njenoj putanji između tačaka M_1 i M_2. Ova granična vrednost naziva se krivolinijski integral. Dakle, rad sile $\vec{F}$ obeležava se sa A ili $A_{M_1M_2}$ i određen je sa $A = A_{M_1M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Ako je za izračunavanje rada sile izabran Dekartov koordinatni sistem $Oxyz$, tada je

$$A = \int_{M_1}^{M_2} (Xdx + Ydy + Zdz), \quad A = \int_{t_1}^{t_2} (X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z})dt .$$

U opštem slučaju rešenje prethodnih krivolinijskih integrala zavisi i od oblika putanje i od dužine luka po kome se kreće tačka. Samo u posebnom slučaju rad sile ne zavisi ni od oblika putanje tačke, niti od njenog pređenog puta, već samo od koordinata početnog i krajnjeg položaja tačke. Da bi to bilo ispunjeno, linearni diferencijalni izraz $Xdx + Ydy + Zdz$ mora da bude totalni diferencijal neke skalarne funkcije položaja tačke $f(x,y,z)$, što znači da se X, Y i Z mogu predstaviti kao parcijalni izvodi te funkcije. Sile koje ispunjavaju te uslove zovu se konzervativne i rad takvih sila zavisi samo od početnog i krajnjeg položaja tačke na putanji. Svaka sila koja je funkcija položaja ne mora da ispunjava te zahteve koji se nazivaju uslovi konzervativnosti.

Snaga sile

Snaga sile je veličina koja karakteriše promenu po vremenu rada sile. U cilju definisanja snage sile posmatra se tačka na koju deluje sila $\vec{F}$, koja izvrši rad ΔA za konačan interval vremena Δt, pri pomeranju tačke iz položaja M_1, u kome se nalazila u trenutku t_1 u položaj M_2 koji odgovara trenutku t_2. Srednja snaga te sile, za posmatrani interval vremena, određena je sa $P_{sr} = \frac{\Delta A}{\Delta t}$. Snaga sile $\vec{F}$, u trenutku t, predstavlja graničnu vrednost srednje snage sile kada posmatrani interval vremena teži nuli, tj. $P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\delta A}{dt}$. Dakle, snaga sile u datom trenutku jednaka je odnosu elementarnog rada sile i intervala vremena u kome je taj rad izvršen i predstavlja brzinu vršenja rada u tom trenutku.