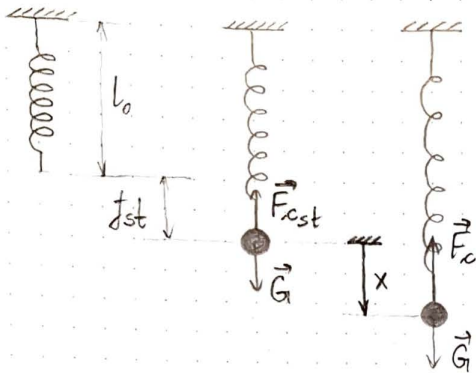


4.1. Тело тежине 2N обешено је о еластичну опру, чија је крутост таква да под дејством силе од 0,5 N издужење износи 1 cm. Коју почетну брзину вертикалног правца треба саопштити телу у положају равнотеже да би амплитуде његових осцилација имале вредности 2 cm.



$$c = \frac{0,5 \text{ N}}{1 \text{ cm}} = 50 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$R = 2 \text{ cm}$$

$$G = 2 \text{ N}$$

$$\dot{x}_0 \dots ?$$

$$m\vec{a} = 0 = \vec{G} + \vec{F}_{cst} / \cdot \vec{e}$$

$$0 = G - cf_{st}$$

$$f_{st} = \frac{G}{c}$$

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{F}_c / \cdot \vec{e}$$

$$m\ddot{x} = G - c(x + f_{st})$$

$$m\ddot{x} = \cancel{G} - cx - \cancel{cf_{st}}$$

$$m\ddot{x} + cx = 0 \quad / : m$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \omega^2 = \frac{c}{m}$$

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\omega$$

$$x = A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}$$

$$e^{\pm ikt} = \cos kt \pm i \sin kt$$

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$$

$$C_1 = R \cos \alpha, \quad C_2 = R \sin \alpha$$

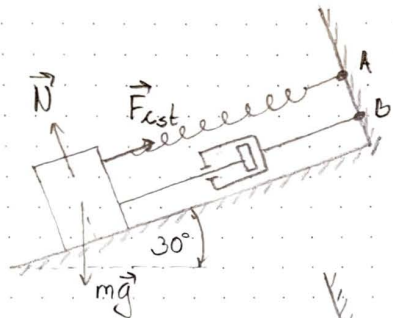
$$x = R \cos \alpha \cos \omega t + R \sin \alpha \sin \omega t$$

$$x = R \cos(\omega t - \alpha) \xrightarrow{t_0} 0 = R \cos(-\alpha) = R \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\dot{x} = -R\omega \sin(\omega t - \alpha) \xrightarrow{t_0} \dot{x}_0 = -R\omega \sin(-\alpha) = R\omega \sin \alpha \leftarrow$$

$$\dot{x}_0 = R \sqrt{\frac{c}{m}} = R \sqrt{\frac{cg}{G}} = 0,02 \text{ m} \sqrt{\frac{50 \cdot 9,81}{2}} \Rightarrow \underline{\dot{x}_0 = 0,31 \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

4.30. Тело масе m везано је опругом крутиности c за непокретну тачку А и пригушивачем за непокретну тачку В. Оно може да клизи по тлачкој сирној равни нагиба $\alpha = 30^\circ$. Кретањем клина у цилиндру пригушивача јавља се сила отпора, пропорционална првом степењу брзине клина у односу на цилиндар. Коэф. пропорционалности је β . Одредити коефицијент β тако да је период осциловања 2 пута већи од периода осциловања без пригушивача.

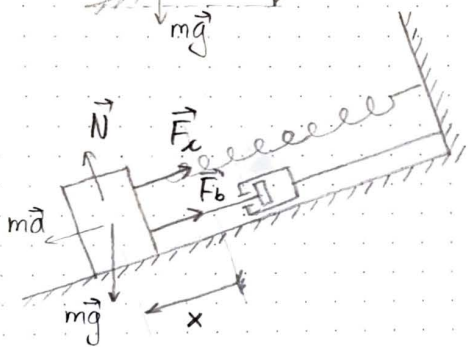


$$m\vec{a} = 0 = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{spring}} / \cdot \vec{e}$$

$$0 = mg \sin 30^\circ - F_{\text{spring}}$$

$$0 = \frac{1}{2}mg - c f_{\text{st}}$$

$$f_{\text{st}} = \frac{mg}{2c}$$



$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_s + \vec{F}_d / \cdot \vec{e}$$

$$m\ddot{x} = mg \sin 30^\circ - c(x + f_{\text{st}}) - \beta \dot{x}$$

$$m\ddot{x} + \beta \dot{x} + cx = \frac{1}{2}mg - c f_{\text{st}} = 0 \quad / : m$$

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega^2 x = 0, \quad 2\delta = \frac{\beta}{m}, \quad \omega^2 = \frac{c}{m}$$

$$\lambda^2 + 2\delta \lambda + \omega^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}, \quad p^2 = \omega^2 - \delta^2$$

коэффициент пригушења

$$T_p = 2T_\omega$$

$$\frac{2\pi}{p} = 2 \frac{2\pi}{\omega}$$

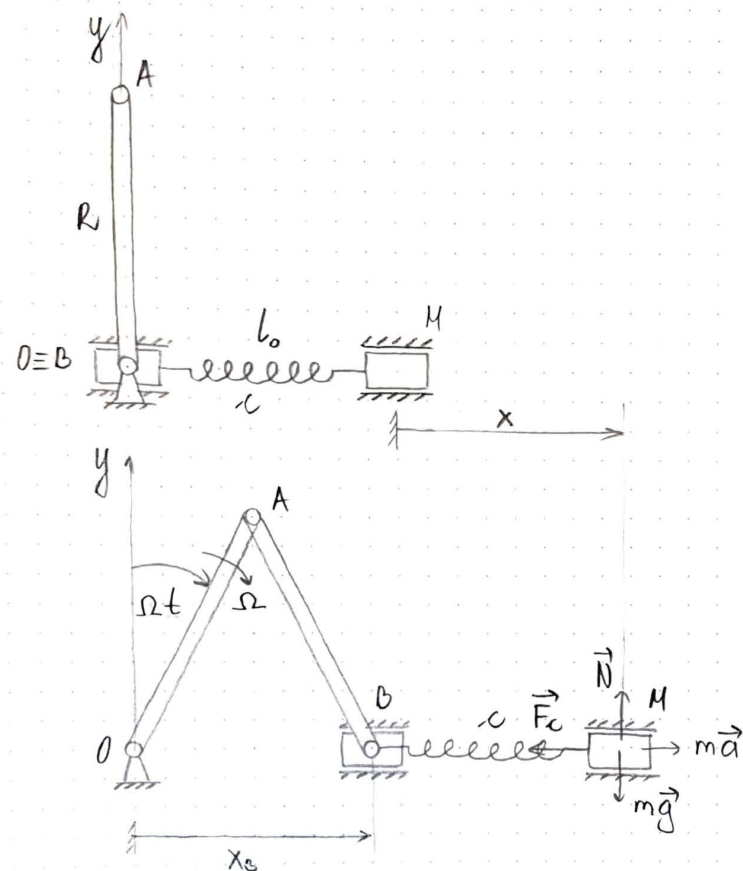
$$p = \frac{\omega}{2} = \sqrt{\omega^2 - \frac{\beta^2}{4m^2}} / 2$$

$$\frac{\omega^2}{4} = \omega^2 - \frac{\beta^2}{4m^2}$$

$$\frac{3}{4}\omega^2 = \frac{\beta^2}{4m^2} \Rightarrow \beta^2 = 3m^2\omega^2$$

$$\beta = \sqrt{3}m\omega$$

4.38. Криваја ОА клинског механизма обрће се константним угловним брзином $\Omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$. За клизач В механизма безано је отвором кружности -с шело М носе m које неће да се креће по главној хоризонталној осовини. Ако је у поч. пр. отвор била ненапрегнута, а шело мировало, написати коначну једначину кретања шела. За координату поч. узети почетни положај шела М. Узети да је $\overline{OA} = \overline{AB} = R$. У почетном тренутку шилови су били вертикални.



$$x_0 = 2R \sin \Omega t = 2R \sin \left(\sqrt{\frac{c}{m}} t \right)$$

$$F_c = -c(x - x_0) = -c(x - 2R \sin \sqrt{\frac{c}{m}} t)$$

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_c \quad / \cdot \vec{i}$$

$$m\ddot{x} = -cx + 2Rc \sin \sqrt{\frac{c}{m}} t$$

$$m\ddot{x} + cx = 2Rc \sin \sqrt{\frac{c}{m}} t \quad / : m$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 2R\omega^2 \sin \sqrt{\frac{c}{m}} t$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\omega$$

$$x_h = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$$

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \Omega \Rightarrow \text{РЕЗОНАНЦИЈА}$$

$$x_p = t(A \cos \Omega t + B \sin \Omega t)$$

$$\dot{x}_p = A \cos \Omega t + B \sin \Omega t$$

$$+ t(-A\Omega \sin \Omega t + B\Omega \cos \Omega t)$$

$$\ddot{x}_p = -A\Omega \sin \Omega t + B\Omega \cos \Omega t$$

$$+ (-A\Omega \sin \Omega t + B\Omega \cos \Omega t)$$

$$+ t(-A\Omega^2 \cos \Omega t - B\Omega^2 \sin \Omega t)$$

$$= 2\Omega(B \cos \Omega t - A \sin \Omega t)$$

$$- t\Omega^2(A \cos \Omega t + B \sin \Omega t)$$

$$2\Omega(B \cos \Omega t - A \sin \Omega t)$$

$$- t\Omega^2(A \cos \Omega t + B \sin \Omega t)$$

$$+ \omega^2 t(A \cos \Omega t + B \sin \Omega t)$$

$$= 2R\omega^2 \sin \sqrt{\frac{c}{m}} t, \quad \omega = \Omega$$

$$2\Omega B - t\Omega^2 A + \omega^2 t A = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$- 2\Omega A - t\Omega^2 B + \omega^2 t B = 2R\omega^2 \quad / : \omega = \Omega$$

$$- 2A = 2R\omega \Rightarrow A = -R\omega$$

$$x_p = -R\omega t \cos \Omega t$$

$$\text{O.P. } x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t - R\omega t \cos \Omega t$$

$$\dot{x} = -C_1 \omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t$$

$$- R\omega(\cos \Omega t - t\Omega \sin \Omega t)$$

$$0 = C_1 + 0 - 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

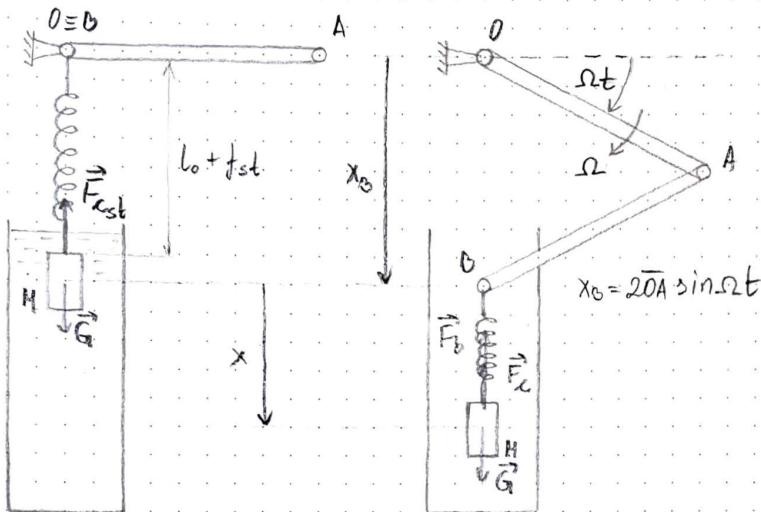
$$0 = -0 + C_2 \omega - R\omega + 0 \Rightarrow C_2 = R$$

$$x = R \sin \omega t - R\omega t \cos \Omega t$$

$$x = R \sin \left(\sqrt{\frac{c}{m}} t \right) - R \sqrt{\frac{c}{m}} t \cos \left(\sqrt{\frac{c}{m}} t \right)$$

4.43. Горњи крај отворе крутости $c = 0,5 \frac{\text{N}}{\text{cm}}$ vezan je za šanku B клинної механізма, а доњи крај за шело M шетине $G_1 = 1 \text{ N}$. Криваја OA обрће се константним угловним брзином $\Omega = 4\pi \text{ s}^{-1}$, а шело M при томе осцилује у амплитудној средини у којој је при брзини $v = 1 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ сила отпора $0,02 \text{ N}$. одредити коначну једначину креш. шела M ако постојаја снажитичке равнотеже који одговара углу $\varphi_0 = 0$. Узети да је $\overline{OA} = \overline{AB} = 3 \text{ cm}$.

* КАДА СЕ ТРАЖЕ ПРИНУДНЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ (ЗБИРКА) \Rightarrow ОДРЕДИТИ САМО x_p !



$$c = 0,5 \frac{\text{N}}{\text{cm}} = 0,5 \cdot 100 \frac{\text{N}}{\text{m}} = 50 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$G_1 = 1 \text{ N}$$

$$\Omega = 4\pi \text{ s}^{-1}$$

$$B = \frac{F_b}{v} = \frac{0,02}{1} = 0,02 \frac{\text{Ns}}{\text{cm}} = 2 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

$$\varphi_0 = 0 \Rightarrow \text{стањ. равн.}$$

$$\overline{OA} = \overline{AB} = 3 \text{ cm} = 0,03 \text{ m}$$

$$\delta = \frac{B}{2m} = \frac{B g}{2G} \approx \frac{2 \cdot 10}{2 \cdot 1} \approx 10$$

$$\omega^2 = \frac{c}{m} = \frac{c g}{G} \approx \frac{50 \cdot 10}{1} \approx 500$$

$$\omega = \sqrt{500} = \sqrt{5} \cdot 10 \quad \omega > \delta!$$

$$m \vec{a} = 0 = \vec{G} + \vec{F}_{\text{est}} / \cdot \vec{e}$$

$$0 = G - c f_{\text{st}} \Rightarrow f_{\text{st}} = \frac{G}{c}$$

$$m \vec{a} = \vec{G} + \vec{F}_c + \vec{F}_b / \cdot \vec{e}$$

$$m \ddot{x} = -c(t_{\text{st}} + x - x_0) - B \dot{x} / m$$

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega^2 x = 2\omega^2 \overline{OA} \sin \Omega t$$

$$\ddot{x} + 20 \dot{x} + 500 x = 30 \sin(4\pi t)$$

$$\lambda^2 + 20\lambda + 500 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-20 \pm \sqrt{400 - 4 \cdot 500}}{2} = \frac{-20 \pm i40}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = -10 \pm i20$$

$$x_h = e^{-10t} (c_1 \cos 20t + c_2 \sin 20t)$$

$$x_p = A \cos \Omega t + B \sin \Omega t$$

$$\dot{x}_p = -A \Omega \sin \Omega t + B \Omega \cos \Omega t$$

$$\ddot{x}_p = -A \Omega^2 \cos \Omega t - B \Omega^2 \sin \Omega t$$

$$-A \Omega^2 \cos \Omega t - B \Omega^2 \sin \Omega t$$

$$-20A \Omega \sin \Omega t + 20B \Omega \cos \Omega t$$

$$+ 500A \cos \Omega t + 500B \sin \Omega t$$

$$= 30 \sin \Omega t$$

$$-B \Omega^2 - 20A \Omega + 500B = 30$$

$$\Omega^2 = 16\pi^2$$

$$-A \Omega^2 + 20B \Omega + 500A = 0$$

$$342,25B - 251,2A = 30$$

$$251,2B + 342,25A = 0 \quad / \cdot \frac{342,25}{251,2}$$

$$-251,2A - \frac{(342,25)^2}{251,2} A = 30 / \cdot 251,2$$

$$-(251,2)^2 A - (342,25)^2 A = 30 \cdot 251,2$$

$$A = -\frac{30 \cdot 251,2}{(251,2)^2 + (342,25)^2} = -0,042$$

$$B = -\frac{342,25}{251,2} A = 0,057$$

$$x_p = -0,042 \cos 4\pi t + 0,057 \sin 4\pi t$$

$$x = e^{-10t} (c_1 \cos 20t + c_2 \sin 20t)$$

$$-0,042 \cos 4\pi t + 0,057 \sin 4\pi t$$

$$\dot{x} = -10e^{-10t} (c_1 \cos 20t + c_2 \sin 20t)$$

$$+ e^{-10t} (-20c_1 \sin 20t + 20c_2 \cos 20t)$$

$$+ 0,527 \sin 4\pi t + 0,716 \cos 4\pi t$$

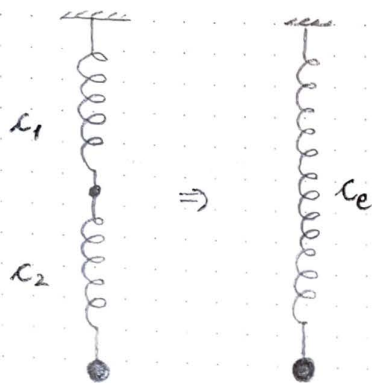
$$0 = c_1 - 0,042 \Rightarrow c_1 = 0,042$$

$$0 = -10c_1 + 20c_2 + 0,716 \Rightarrow c_2 = 0,0148$$

$$x = e^{-10t} (0,042 \cos 20t + 0,0148 \sin 20t)$$

$$-0,042 \cos 4\pi t + 0,057 \sin 4\pi t$$

I



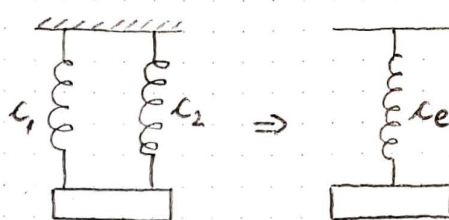
$$\Delta X = \Delta X_1 + \Delta X_2$$

$$F_c = F_{c1} = F_{c2}$$

$$\frac{F_c}{c_e} = \frac{F_{c1}}{c_1} + \frac{F_{c2}}{c_2} \quad / : F_c$$

$$\boxed{\frac{1}{c_e} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}}$$

II



$$\Delta X = \Delta X_1 = \Delta X_2$$

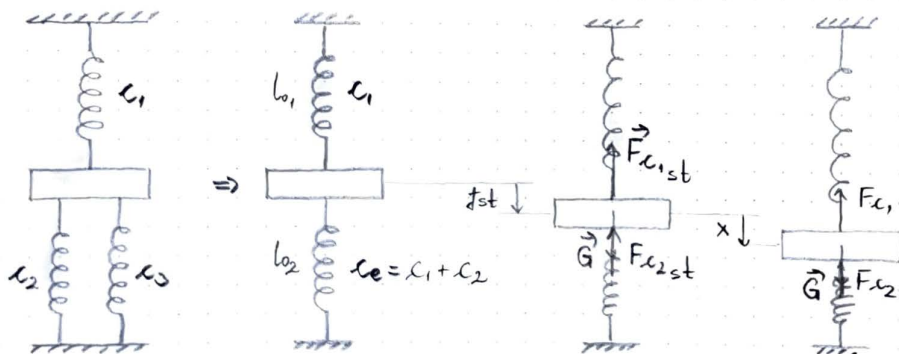
$$F_c = F_{c1} + F_{c2}$$

$$c_e \Delta X = c_1 \Delta X_1 + c_2 \Delta X_2 \quad / : \Delta X$$

$$\boxed{c_e = c_1 + c_2}$$

ЕКВИВАЛЕНТНА КРУТОСТ ОПРУГЕ

4.8. Тело масе $m = 1 \text{ kg}$ везано је вертикалним опругама крутошти $c_1 = 2 \frac{\text{N}}{\text{cm}}$, $c_2 = c_3 = 7 \frac{\text{N}}{\text{cm}}$. Одредити кружну фреквенцију вертикалних осцилација тела.



$$m\vec{a} = 0 = \vec{G} + \vec{F}_{c1st} + \vec{F}_{c2st}$$

$$0 = G - c_1 t_{st} - c_e t_{st}$$

$$(c_1 + c_e) t_{st} = G$$

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{F}_{c1} + \vec{F}_{c2}$$

$$m\ddot{x} = G - c_1(t_{st} + x) - c_e(t_{st} + x)$$

$$m\ddot{x} + (c_1 + c_e)x = 0$$

$$c = c_1 + c_e = c_1 + c_2 + c_3$$

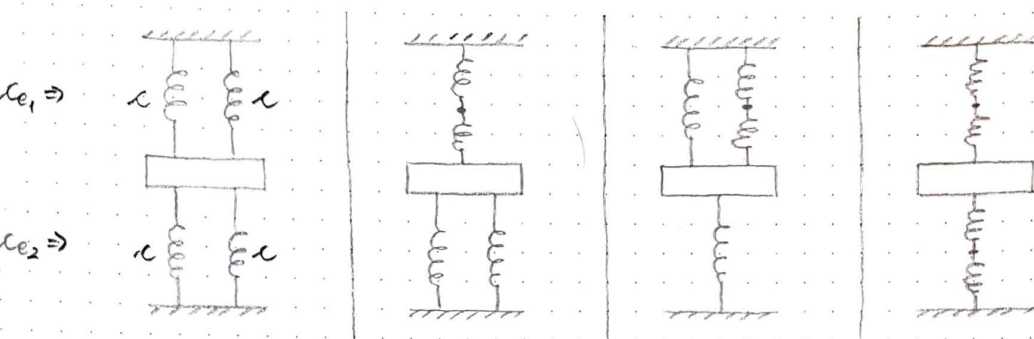
$$m\ddot{x} + c x = 0 \quad / : m$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

$$\omega^2 = \frac{c}{m} = \frac{c_1 + c_2 + c_3}{m}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{16 \frac{\text{N}}{\text{cm}}}{1 \text{ kg}}} = 4 \sqrt{100 \frac{\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1}{\text{kg}}}} \Rightarrow \underline{\omega = 40 \text{ s}^{-1}}$$

4.9. Тело масе m , везано помоћу четири опруге једнаких круто́сти c , врши вертикалне осцилације. На сликама приказана су четири различита начина везивања опруга. Одредити периоде осциловања за сва четири случаја.

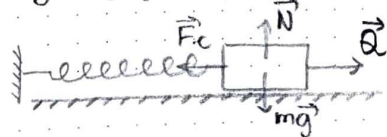


$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Из задатка 4.8. види се да је $\omega^2 = \frac{c_1 + c_2}{m} = \frac{c}{m}$

$c_1 = 2c$ $c_2 = 2c$ $\omega^2 = \frac{4c}{m}$ $\omega = 2\sqrt{\frac{c}{m}}$ $T = \pi\sqrt{\frac{m}{c}}$	$\frac{1}{c_1} = \frac{1}{c} + \frac{1}{c} = \frac{2}{c}$ $c_1 = \frac{c}{2}$ $c_2 = 2c$ $\omega^2 = \frac{5c}{2m}$ $T = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{5c}}$	$c_1 = c + \frac{c}{2} = \frac{3}{2}c$ $c_2 = c$ $\omega^2 = \frac{5c}{2m}$ $T = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{5c}}$	$c_1 = \frac{c}{2}$ $c_2 = \frac{c}{2}$ $\omega^2 = \frac{c}{m}$ $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$
--	--	---	--

4.37. Тело А масе $m = 1 \text{ kg}$ везано опругом круто́сти $c = 0,1 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$ креће се по хоризонталној главној равни под дејством принудне силе $Q = 10 \sin(10t + \frac{1}{3}) [\text{N}]$, $t [\text{s}]$. Одредити принудне осцилације тела А.



$$m\ddot{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_c + \vec{Q} \quad / : \vec{e}$$

$$m\ddot{x} = -cx + 10 \sin(10t + \frac{1}{3})$$

$$m\ddot{x} + cx = 10 \sin(10t + \frac{1}{3}) \quad / : m$$

$$\ddot{x} + 100x = 10 \sin(10t + \frac{1}{3})$$

$$\omega^2 = \frac{c}{m} = 100$$

$$\lambda^2 + 100 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i10$$

$$x_h = c_1 \cos 10t + c_2 \sin 10t$$

Да ли има резонанције?!

$$\omega = 10$$

$$\Omega = 10$$

иако код принудне силе постоји фазна разлика!

$$x_p = t(A \sin 10t + B \cos 10t)$$

$$\dot{x}_p = A \sin 10t + B \cos 10t + t(10A \cos 10t - 10B \sin 10t)$$

$$\ddot{x}_p = 20A \cos 10t - 20B \sin 10t - t(100A \sin 10t + 100B \cos 10t)$$

$$20A \cos 10t - 20B \sin 10t - 100At \sin 10t - 100Bt \cos 10t$$

$$+ 100At \sin 10t + 100Bt \cos 10t = 10 \cos \frac{1}{3} \sin 10t + 10 \sin \frac{1}{3} \cos 10t$$

$$20A - 100Bt + 100Bt = 10 \sin \frac{1}{3} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \sin \frac{1}{3}$$

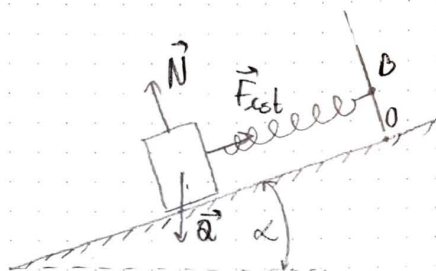
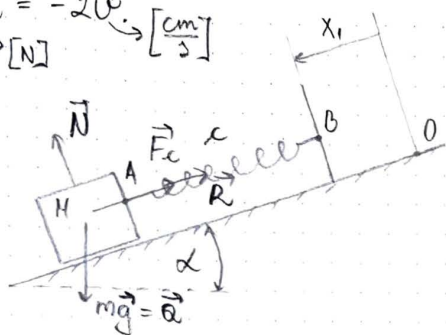
$$-20B - 100At + 100At = 10 \cos \frac{1}{3} \Rightarrow B = -\frac{1}{2} \cos \frac{1}{3}$$

$$x_p = \frac{1}{2} t \left(\sin \frac{1}{3} \sin 10t - \cos \frac{1}{3} \cos 10t \right)$$

$$x_p = -\frac{1}{2} t \cos(10t + \frac{1}{3})$$

4.42. На страној равни нагиба $\alpha = 30^\circ$ налази се тело M тежине $Q = 100\text{ N}$. Тело је везано за крај A еластичне опруге крућости $c = 50 \frac{\text{N}}{\text{cm}}$. Крај B опруге креће се дуж осе опруге по закону $x_1 = 2 \sin(15t)$.
Одредити једначину принудних осцилација тела M , ако се при његовом кретању јавља и сила отпора

$$\vec{R} = -2\vec{v} \rightarrow \left[\frac{\text{cm}}{\text{s}} \right] \rightarrow [\text{N}]$$



$$m\vec{a} = 0 = \vec{Q} + \vec{N} + \vec{F}_{cst} + \vec{R}$$

$$0 = Q \sin \alpha - c \dot{x}_{st}$$

$$c \dot{x}_{st} = \frac{1}{2} Q$$

$$m\vec{a} = \vec{Q} + \vec{N} + \vec{F}_c + \vec{R}$$

$$F_c = c(\dot{x}_{st} + x - x_1)$$

$$c = 50 \frac{\text{N}}{\text{cm}} = 50 \cdot 100 \frac{\text{N}}{\text{m}} = 5000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$R = -2\dot{x}, \quad \dot{x} \left[\frac{\text{cm}}{\text{s}} \right], \quad R[\text{N}] \Rightarrow -2 \left[\frac{\text{kg}}{\text{s}} \cdot 10^2 \right] \cdot \dot{x} \left[\frac{10^{-2} \text{ m}}{\text{s}} \right] = R[\text{N}] \Rightarrow R = -2 \cdot 10^2 \dot{x}$$

$$m\ddot{x} = Q - c(\dot{x}_{st} + x - x_1) - 200\dot{x} \quad m = \frac{G}{g} = 10,19 \text{ kg}$$

$$10,19\ddot{x} + 200\dot{x} + 5000x = 5000 \cdot 2 \sin(15t) \quad / : 10,19$$

$$\ddot{x} + 19,63\dot{x} + 490,68x = 981,35 \sin(15t)$$

$$x_p = A \sin 15t + B \cos 15t \Rightarrow \dot{x}_p = 15A \cos 15t - 15B \sin 15t \Rightarrow \ddot{x}_p = -225(A \sin 15t + B \cos 15t)$$

$$-225A \sin 15t - 225B \cos 15t + 294,45A \cos 15t - 294,45B \sin 15t$$

$$+ 490,68A \sin 15t + 490,68B \cos 15t = 981,35 \sin 15t$$

$$-225A - 294,45B + 490,68A = 981,35$$

$$-225B + 294,45A + 490,68B = 0 \Rightarrow A = -\frac{265,68}{294,45} B = -0,902B$$

$$\rightarrow 265,68(-0,902B) - 294,45B = 981,35 \Rightarrow B = 1,837$$

$$A = -1,657$$

$$x_p = -1,657 \sin 15t + 1,837 \cos 15t$$