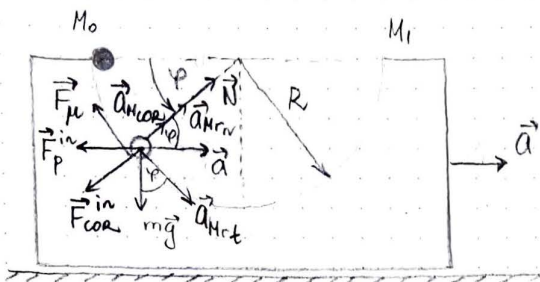


6.37. Унутар призматичног тела које се креће по хоризонталној равни константним убрзањем интензитета  $a=g$ , урезан је полуцилиндричан канал полупречника  $R$ . По површини канала креће се тачка масе  $m$  при чему коефицијент трења има вредност  $\mu=0.5$ . Коју почетну релативну брзину треба да има тачка у положају  $M_0$  да би сбила у положај  $M_1$ ?



АБСОЛУТНО УБРАЊЕ ТАЧКЕ  $M$   
 → ПРЕНОСНО  
 → РЕЛАТИВНО  
 → КОРИОЛИСОВО

$$\vec{a}_M = \vec{a}_P + \vec{a}_{Mr} + \vec{a}_{Mcor}$$

$$\vec{a}_P = \vec{a} \Rightarrow \vec{F}_P^{in} = -m\vec{a} \Rightarrow F_P^{in} = ma$$

$$\vec{a}_{Mr} = \vec{a}_{Mrt} + \vec{a}_{Mrn} \Rightarrow \text{КРЕТАЊЕ ПО КАНАЛУ}$$

$$a_{Mrt} = R\ddot{\varphi}, \quad a_{Mrn} = R\dot{\varphi}^2$$

$$\vec{a}_{Mcor} = 2\vec{\omega}_P \times \vec{v}_r = 0 \quad (\vec{\omega}_P = 0) \Rightarrow \vec{F}_{cor}^{in} = 0$$

$$m\vec{a}_{Mr} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_\mu + \vec{F}_P^{in} + \vec{F}_{cor}^{in}$$

$$m\vec{a}_{Mrt} + m\vec{a}_{Mrn} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_\mu + \vec{F}_P^{in}$$

$$t: ma_{Mrt} = mg \cos \varphi - F_\mu - ma \sin \varphi$$

$$n: ma_{Mrn} = -mg \sin \varphi + N - ma \cos \varphi$$

$$F_\mu = \mu N$$

$$\Rightarrow N = mg \sin \varphi + ma \cos \varphi + mR\dot{\varphi}^2$$

$$mR\ddot{\varphi} = mg \cos \varphi - \mu(mg \sin \varphi + ma \cos \varphi + mR\dot{\varphi}^2) - ma \sin \varphi$$

$$mR\ddot{\varphi} + \mu mR\dot{\varphi}^2 = -m(a + \mu g) \sin \varphi + m(g - \mu a) \cos \varphi \quad / : m$$

$$a = g, \quad \mu = 0.5$$

$$R\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}R\dot{\varphi}^2 = -\frac{3}{2}g \sin \varphi + \frac{1}{2}g \cos \varphi$$

$$R\dot{\varphi} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} + \frac{1}{2}R\dot{\varphi}^2 = -\frac{3}{2}g \sin \varphi + \frac{1}{2}g \cos \varphi$$

$$\frac{1}{2}R \frac{dz}{d\varphi} + \frac{1}{2}Rz = -\frac{3}{2}g \sin \varphi + \frac{1}{2}g \cos \varphi \cdot \frac{2}{R}$$

$$z' + z = -\frac{3}{R}g \sin \varphi + \frac{1}{R}g \cos \varphi$$

$$\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow z_h = C_1 e^{-\varphi}$$

$$z_p = A \sin \varphi + B \cos \varphi \Rightarrow z_p' = \frac{dz_p}{d\varphi} = A \cos \varphi - B \sin \varphi$$

$$A \cos \varphi - B \sin \varphi + A \sin \varphi + B \cos \varphi = -\frac{3}{R}g \sin \varphi + \frac{1}{R}g \cos \varphi$$

$$A - B = -\frac{3}{R}g \Rightarrow A = B - \frac{3}{R}g$$

$$A + B = \frac{1}{R}g$$

$$B - \frac{3}{R}g + B = \frac{1}{R}g \Rightarrow B = \frac{2}{R}g \Rightarrow A = -\frac{1}{R}g$$

$$z_p = -\frac{1}{R}g \sin \varphi + \frac{2}{R}g \cos \varphi$$

$$z = \dot{\varphi}^2 = C_1 e^{-\varphi} - \frac{1}{R}g \sin \varphi + \frac{2}{R}g \cos \varphi$$

$$\dot{\varphi}_0^2 = C_1 e^0 - \frac{1}{R}g \sin 0 + \frac{2}{R}g \cos 0$$

$$\dot{\varphi}_0^2 = C_1 + \frac{2}{R}g$$

$$\dot{\varphi}_1^2 = 0 = C_1 e^{-\pi} - \frac{1}{R}g \sin \pi + \frac{2}{R}g \cos \pi$$

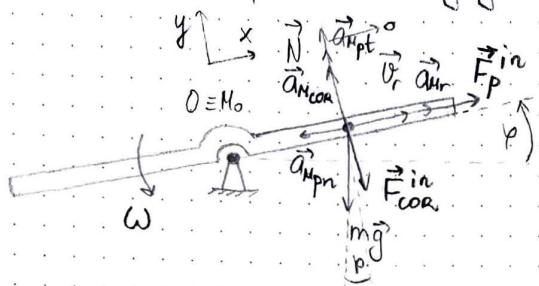
$$C_1 = 2\frac{g}{R}e^\pi$$

$$\dot{\varphi}_0^2 = 2\frac{g}{R}e^\pi + \frac{2}{R}g = \frac{2}{R}g(e^\pi + 1)$$

$$v_0 = R\dot{\varphi}_0$$

$$v_0 = R\sqrt{\frac{2}{R}g(e^\pi + 1)}$$

6.19. Цев АВ обрће се око хоризонталне осе О константним угаоним брзином  $\omega$ . Кроз цев се креће без трења шатка Н масе  $m$ . У почетној тренутку, када је цев била у хоризонталној положају шатка се налазила у положају О и имала почетну брзину  $v_0 = \frac{g}{2\omega}$ . Одредити једначину релативне кретања шатке и максимални притисак на зид цеви.



$$\omega = \text{const.} \Rightarrow \varphi = \omega t \Rightarrow \dot{\varphi} = \omega \Rightarrow \ddot{\varphi} = 0$$

$$\vec{a}_N = \vec{a}_{Nr} + \vec{a}_{Nr\perp} + \vec{a}_{Ncor}$$

$$\vec{a}_{Nr} = \vec{a}_{Nr\perp} + \vec{a}_{Nr\parallel}, \quad a_{Nr\perp} = x\dot{\varphi}^2, \quad a_{Nr\parallel} = x\ddot{\varphi} = x\omega^2$$

$$\vec{F}_P^{in} = -m\vec{a}_{Nr} \Rightarrow F_P^{in} = ma_{Nr\parallel} = m\omega^2 x$$

$$\vec{a}_{Ncor} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r \Rightarrow a_{Ncor} = 2\dot{\varphi}\dot{x}\sin 90^\circ = 2\omega\dot{x}$$

$$\vec{F}_{cor}^{in} = -m\vec{a}_{cor} \Rightarrow F_{cor}^{in} = 2m\omega\dot{x}$$

$$a_{Nr} = \ddot{x}$$

$$m\vec{a}_{Nr} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_P^{in} + \vec{F}_{cor}^{in}$$

$$x: m\ddot{x} = -mg\sin\varphi + m\omega^2 x \quad / : m$$

$$y: 0 = -mg\cos\varphi + N - 2m\omega\dot{x} \Rightarrow N = 2m\omega\dot{x} + mg\cos(\omega t)$$

$$\ddot{x} - \omega^2 x = -g\sin(\omega t)$$

$$\lambda^2 - \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\omega$$

$$x_h = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}$$

$$x_p = A\cos\omega t + B\sin\omega t \Rightarrow \ddot{x}_p = -A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t$$

$$-A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t - A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t = -g\sin\omega t$$

$$\left. \begin{aligned} -B\omega^2 - B\omega^2 &= -g \Rightarrow B = \frac{g}{2\omega^2} \\ -2A\omega^2 &= 0 \Rightarrow A = 0 \end{aligned} \right\} x_p = \frac{g}{2\omega^2} \sin\omega t$$

$$x = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2} \sin\omega t$$

$$\dot{x} = C_1 \omega e^{\omega t} - C_2 \omega e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega} \cos\omega t$$

$$0 = C_1 + C_2$$

$$\Rightarrow C_1 = -C_2$$

$$\frac{g}{2\omega} = C_1 \omega - C_2 \omega + \frac{g}{2\omega} \Rightarrow C_1 = C_2$$

$$\Rightarrow C_1 = C_2$$

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= -C_2 \\ C_1 &= C_2 \end{aligned} \right\} C_1 = C_2 = 0$$

$$x = \frac{g}{2\omega^2} \sin\omega t$$

$$\dot{x} = \frac{g}{2\omega} \cos\omega t \Rightarrow N = 2m\omega \frac{g}{2\omega} \cos\omega t + mg\cos\omega t$$

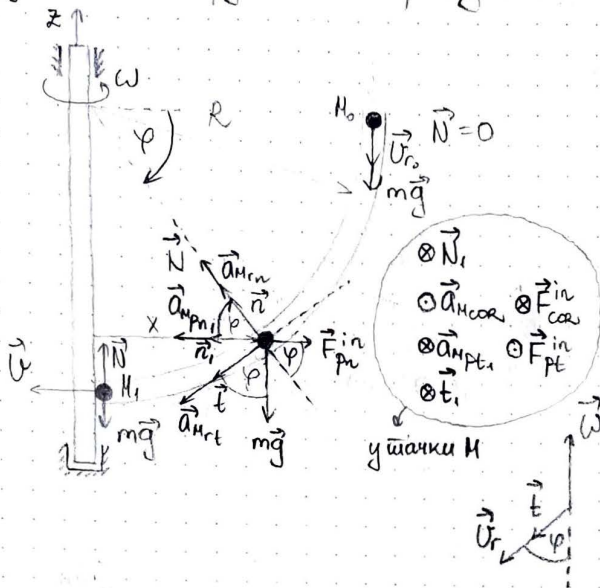
$$N = 2mg\cos\omega t$$

$$N_{max} \rightarrow \cos\omega t = 1 \Rightarrow \omega t = k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$N_{max} = 2mg$$



6.28. Цев сабијена у кружни лук полупречника  $R$  обрће се око вертикалне осе  $OO_1$  константном угаonom брзином  $\omega$ . Коликом брзином  $U_0$  треба убацивати куглицу масе  $m$  у цев кроз отвор  $A$  да би на отвору  $B$  имала брзину  $U$ ?



$$\vec{a}_m = \vec{a}_{np} + \vec{a}_{nr} + \vec{a}_{ncor}$$

$$\vec{a}_{np} = \vec{a}_{npt} + \vec{a}_{npr} = a_{npt} \vec{t}_1 + a_{npr} \vec{n}_1$$

$$\left. \begin{aligned} a_{npt} &= x\dot{\omega} = 0 \quad (\omega = \text{const.}) \\ a_{npr} &= x\omega^2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \vec{F}_p^{in} &= \vec{F}_{pn}^{in} + \vec{F}_{pt}^{in} \\ F_{pn}^{in} &= m\omega^2 x \end{aligned}$$

$$\vec{a}_{nr} = \vec{a}_{nrt} + \vec{a}_{nrr} = a_{nrt} \vec{t} + a_{nrr} \vec{n}$$

$$a_{nrt} = R\ddot{\varphi}$$

$$a_{nrr} = R\dot{\varphi}^2$$

$$\vec{a}_{ncor} = 2\vec{\omega}_p \times \vec{v}_r, \quad \omega_p = \omega, \quad v_r = R\dot{\varphi}$$

$$a_{ncor} = 2\omega R\dot{\varphi} \sin \angle(\vec{\omega}_p, \vec{v}_r) = 2\omega R\dot{\varphi} \sin(180^\circ - \varphi)$$

$$a_{ncor} = 2\omega R\dot{\varphi} \sin \varphi$$

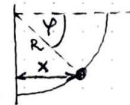
$$m\vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{N}_1 + \vec{F}_p^{in} + \vec{F}_{cor}^{in} \quad / \cdot \vec{t} / \cdot \vec{n}$$

\* ПРОЕКЦИЈЕ СЕ НА  $\vec{t}$  И  $\vec{n}$  ЈЕР СУ ТО ЈЕДИНИЧНИ ВЕКТОРИ КОЈИ СУ У ВЕЗИ СА РЕЛАТИВНИМ КРЕТАЊЕМ

$$t: mR\ddot{\varphi} = mg \cos \varphi - F_{pn}^{in} \sin \varphi \Rightarrow mR\ddot{\varphi} = mg \cos \varphi - m\omega^2 x \sin \varphi \quad (1) / : m$$

$$n: mR\dot{\varphi}^2 = -mg \sin \varphi + N - F_{pn}^{in} \cos \varphi \Rightarrow mR\dot{\varphi}^2 = -mg \sin \varphi + N - m\omega^2 x \cos \varphi \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow R\ddot{\varphi} = g \cos \varphi - \omega^2 x \sin \varphi, \quad x = R \cos \varphi$$



$$\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} \cdot \frac{dt}{d\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} \cdot \dot{\varphi} = \frac{\dot{\varphi} d\dot{\varphi}}{d\varphi}$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{v_r dv_r}{R^2 d\varphi} = \frac{d(v_r^2)}{2R^2 d\varphi}$$

$$R \cdot \frac{d(v_r^2)}{2R^2 d\varphi} = g \cos \varphi - \omega^2 R \cos \varphi \sin \varphi \quad / \cdot d\varphi / \cdot 2R$$

$$* v_r = R\dot{\varphi} / d \Rightarrow dv_r = R d\dot{\varphi}, \quad d\dot{\varphi} = \frac{dv_r}{R}, \quad \dot{\varphi} = \frac{v_r}{R}$$

$$* d(v_r^2) = 2v_r dv_r \Rightarrow v_r dv_r = \frac{d(v_r^2)}{2}$$

$$d(v_r^2) = 2Rg \cos \varphi d\varphi - 2R^2 \omega^2 \cos \varphi \sin \varphi d\varphi$$

$$\int_{v_0^2}^{U^2} d(v_r^2) = 2Rg \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi - 2R^2 \omega^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi$$

\* ГРАНИЦЕ ИНТЕГРАЦИЈЕ

$$\varphi = 0 \Rightarrow v_r = v_0$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow v_r = U$$

↓

$$\text{СМЕНА: } z = \sin \varphi$$

$$U^2 / v_0^2 = 2Rg \sin \varphi / \frac{\pi}{2} - 2R^2 \omega^2 \int_0^1 z dz$$

$$dz = \cos \varphi d\varphi \Rightarrow d\varphi = \frac{dz}{\cos \varphi}$$

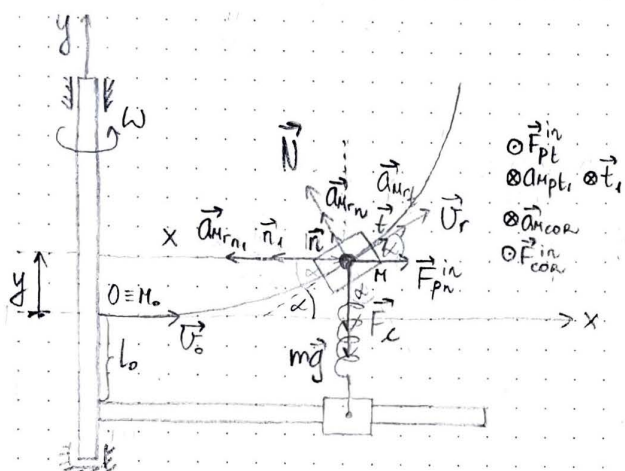
$$z_1 = \sin 0 = 0$$

$$z_2 = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \quad \left. \begin{aligned} z_1 &= \sin 0 = 0 \\ z_2 &= \sin \frac{\pi}{2} = 1 \end{aligned} \right\} \text{нове границе}$$

$$\underline{U_0^2 = U^2 - 2Rg + R^2 \omega^2}$$

\* ИЗ ЈЕДНАЧИНЕ (2) БИ МОГЛО ДА СЕ ОДРЕДИ  $N$

6.27. Клизач масе  $m$  везан је опругом крутошћу  $c$  и може да клизи по глаткој жици  $OA$ . Жица је својим крајем  $O$  везана за вертикалну осу  $Oy$  око које се раван  $xOy$  у којој лежи жица окреће константном угаonom брзином  $\omega$ . Други крај опруге креће се по правој паралелној  $x$ -оси. При кретању клизача опруга има стално нормалан правац на  $x$ -осу. У почетном положају клизач се налазио у коорд. пот. и имао почетну брзину интензитета  $v_0$ , док је опруга била ненапрегнута. Наћи функцију која описује облик жице тако да брзина клизача у односу на жицу има константан интензитет.



$$F_c = cy$$

$$m\vec{a}_{nr} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_c + \vec{F}_{pr}^{in} + \vec{F}_{cor}^{in} / \vec{e} / \vec{n}$$

$$t: m a_{nr\vec{e}} = -mg \sin \alpha - F_c \sin \alpha + F_{pr}^{in} \cos \alpha \quad (1) \Rightarrow \text{ПРОЈЕКЦИЈА НА } \vec{e} \text{ ДАЈЕ БЕЗУ ИЗМЕНЈУ } x \text{ И } y$$

$$n: m a_{nr\vec{n}} = -mg \cos \alpha + N - F_c \cos \alpha - F_{pr}^{in} \sin \alpha \quad (2) \Rightarrow \text{НЕ КОРИСТИ СЕ}$$

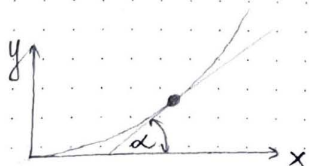
$$(1) \Rightarrow 0 = -mg \sin \alpha - cy \sin \alpha + m\omega^2 x \cos \alpha \quad / : \cos \alpha$$

$$0 = -mg \tan \alpha - cy \tan \alpha + m\omega^2 x \Rightarrow 0 = -mg \frac{dy}{dx} - cy \frac{dy}{dx} + m\omega^2 x \quad / dx$$

$$\tan \alpha = \frac{dy}{dx} = y'$$

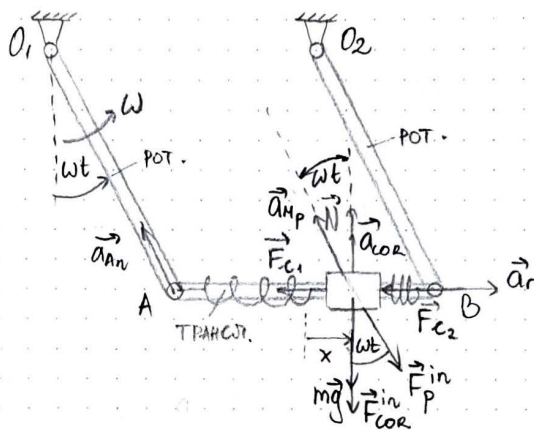
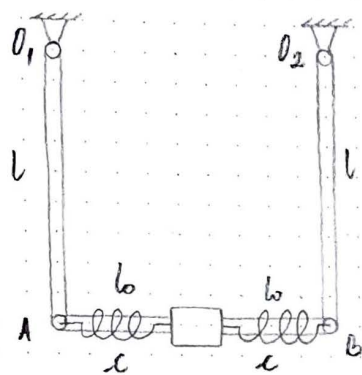
$$0 = -mg \int dy - c \int y dy + m\omega^2 \int x dx$$

$$cy^2 + 2mgy - m\omega^2 x^2 = 0$$





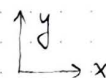
6.13. Зглобни четвороугао  $O_1ABO_2$  сачињавају три зглобне безмаса штапа једнаких дужина  $l$ . Механизам се креће у вертикалној равни тако да се штапови  $O_1A$  и  $O_2B$  обрћу константним угловним брзином  $\omega$ . По штапком штапу  $AB$  креће се клизач масе  $m$ , занемарљивих димензија. Клизач је отворена једнаких кружности  $c = \frac{m\omega^2}{2}$  безан за крајеве штапа  $AB$ . У почетном тренутку  $t_0 = 0$  штапови  $O_1A$  и  $O_2B$  пролазили су кроз вертикалне положаје, а клизач је био на средини штапа  $AB$  у релативном миру, при чему су отворе биле ненапрегнуте. Одредити коначну једначину релативног кретања клизача у односу на штап  $AB$  и реакцију безе између штапа и клизача у функцији времена.



$$c = \frac{m\omega^2}{2}$$

$$\omega = \text{const.}$$

$$x_0 = 0, \dot{x}_0 = 0$$

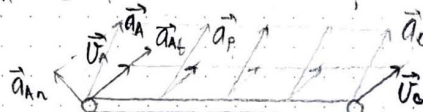


$$F_{c1} = F_{c2} = cx$$

$$\vec{a}_{H_{cor}} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r \Rightarrow a_{H_{cor}} = 2\omega \dot{x} \sin 90^\circ = 0 \Rightarrow \vec{F}_{cor}^{\text{in}} = 0$$

$$\vec{a}_{H_p} = \vec{a}_A = \vec{a}_B$$

УТАП  $AB$  ВРШИ ТРАНСЛАТОРНО КРЕТАЊЕ



УТАП  $AB$  УВЕК ОСТАЈЕ ПАРАЛЕЛАН САМОМ СЕБИ  $\Rightarrow \omega_{AB} = 0$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{H_p}, a_{At} = l\epsilon = 0, a_{An} = l\omega^2 \Rightarrow a_{H_p} = l\omega^2 \Rightarrow F_p^{\text{in}} = ml\omega^2$$

$$m\vec{a}_{H_r} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{c1} + \vec{F}_{c2} + \vec{F}_p^{\text{in}} + \vec{F}_{cor}^{\text{in}}$$

$$x: m\ddot{x} = -cx - cx + F_p^{\text{in}} \sin \omega t$$

$$y: 0 = -mg + N - F_p^{\text{in}} \cos \omega t - F_{cor}^{\text{in}}$$

$$(1) \quad m\ddot{x} + 2cx = ml\omega^2 \sin \omega t \quad / : m$$

$$(2) \quad \underline{N = mg + ml\omega^2 \cos \omega t}$$

$$(1) \Rightarrow \ddot{x} + k^2 x = \omega^2 \sin \omega t, \quad k^2 = \frac{2c}{m}$$

$$\lambda^2 + k^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm kt$$

$$\underline{x_h = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt}$$

$$-2A\omega \sin \omega t + 2B\omega \cos \omega t - \omega^2 x_p + k^2 x_p = \omega^2 \sin \omega t$$

$$A = -\frac{l\omega}{2}, B = 0 \Rightarrow \underline{x_p = -\frac{l\omega}{2} t \cos \omega t}$$

$$\text{O.P.} \Rightarrow x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t - \frac{l\omega}{2} t \cos \omega t$$

$$\dot{x} = -C_1 \omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t - \frac{l\omega}{2} \cos \omega t + \frac{l\omega^2}{2} t \sin \omega t$$

$$\underline{x = \frac{l}{2} \sin \omega t - \frac{l\omega}{2} t \cos \omega t}$$

$$\bullet \quad k^2 = \frac{2c}{m} = \frac{2}{m} \frac{m\omega^2}{2} = \omega^2 \quad k = \omega \Rightarrow \text{РЕЗОНАНЦИЈА}$$

$$x_p = t(A \cos \omega t + B \sin \omega t)$$

$$\dot{x}_p = A \cos \omega t + B \sin \omega t + t(-A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t)$$

$$\ddot{x}_p = -2A\omega \sin \omega t + 2B\omega \cos \omega t - t\omega^2(A \cos \omega t + B \sin \omega t)$$

$$= -2A\omega \sin \omega t + 2B\omega \cos \omega t - \omega^2 x_p$$

$$k = \omega \Rightarrow \omega^2 x_p = k^2 x_p$$

$$0 = C_1$$

$$0 = C_2 \omega - \frac{l\omega}{2} \Rightarrow C_2 = \frac{l}{2}$$