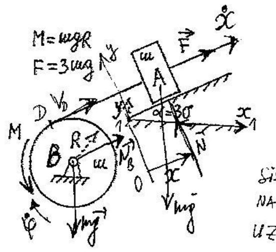


②Sistem je u vertikalnoj ravni. Strma ravan je nagiba α=30°. Teret A, mase m, neistegljivim užetom povezan■ je s diskom (mase m, poluprečnika R). Na disk dejstvuje moment sprega sila M=mgR a na teret A dejstvuje sila F=3mg (paralelna strmoj ravni). Veze su idealne. U tački B je zglobna veza. Odrediti ubrzanje tereta A. $x(0)=0;\ \dot x(0)=0.$

SISTEM IMA JEDAN STEPEN SLOBODE KRETANJA. PRATIMO TO KRETANJE, NA PRIMER, KOORDINATOM x (INERCIJALNOG SISTEMA Oxy). ZA ODREĐIVANJE UZAJAMNE VEZE RUKOVODIMO SE BRZINOM KRETANJA UŽETA I $\boxed{\text{APSOLUTNOM BRZINOM}}$ KRETANJA TELA A (BRZINA TRANSLACIJE) $V_A \equiv \dot x$, PA JE $V_D(\text{TAČKE DISKA}) = R\dot\varphi = \dot x \Rightarrow \dot\varphi = \frac{\dot x}{R}$.

KINETIČKA ENERGIJA JE: $T = T_A + T_{DISKA}$

KAKO JE KRETANJE TERETA A $\boxed{\text{TRANSLATORNO}}$ NJEGOVA KIN. ENER. JE: $T_A = \frac{1}{2} m V_A^2 = \frac{1}{2} m \dot x^2$ → APSOLUTNA BRZINA

DISK $\boxed{\text{ROTIRA OKO NEPOMIČNE OSE}}$ Bz PA MU JE KIN. ENER: $T_{DISKA} = \frac{1}{2} J_{Bz} \dot\varphi^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m R^2\right)\frac{\dot x^2}{R^2} = \frac{m}{4}\dot x^2$ → APSOLUTNA UGAONA BRZINA

UKUPNA KIN. ENER. SISTEMA JE: $T = \sum_{i=1}^{2} T_i = \frac{3}{4} m \dot x^2$

RAD SILA NA PROIZVOLJNOM POMERANJU "x" JE:

$$A = \sum_j A_j \qquad A(m_A\vec g) = -mg\frac{1}{2}x \qquad A(\vec F) = 3mgx \qquad A(M) = -mgR\left(\frac{x}{R}\right) \qquad A(\vec N)=0,\ A(\vec N_B)=0,\ A(m_B\vec g)=0$$

T. J.

$$A(m_A\vec g) = \int_0^x m_A\vec g\cdot[(dx)\vec i\,] = -\left(\tfrac{1}{2}\right)\int_0^x mg\,dx = -\frac{mg}{2}x \qquad \begin{cases} A(\vec F) = \int_0^x \vec F\cdot(dx\vec i\,) = \int_0^x 3mg\,dx = 3mgx \quad (\vec i\cdot\vec i = 1) \\ \vec F = 3mg\vec i \end{cases}$$

$$A(M) = -\int_{\varphi_0=0}^{\varphi} M\,d\varphi = -\int_0^{\varphi}(mgR)\left(\frac{dx}{R}\right) = -mgx \qquad A(\vec N) = \int (N\vec j)\cdot(dx\,\vec i\,) = 0 \quad (\vec j\cdot\vec i = 0) \quad \dots$$

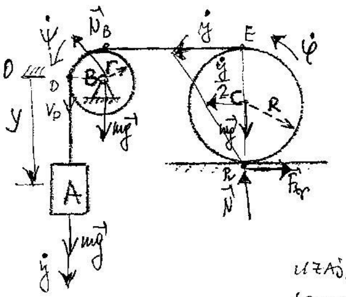
$$A = \sum_j A_j = \frac{3}{2} mgx$$

TEOREMA O PROMENI KIN. ENER. U INTEGRALNOM OBLIKU: $T - \cancel{T_0}^{\,0} = A^{(s)} + \cancel{A^{(u)}}_{\,0}$

$$\frac{3}{4} m\dot x^2 = \frac{3}{2} mgx \qquad \dot x^2 = 2gx \Big/ \frac{d}{dt} \Rightarrow 2\dot x\ddot x = 2g\dot x \Rightarrow \boxed{\ddot x = g}.$$

$\boxed{\text{NAPOMENA}}$: NAŠ MODEL PREDSTAVLJA "NEIZMENLJIV" SISTEM PA JE RAD UNUTRAŠNJIH SILA JEDNAK NULI $[A^{(u)} = 0]$. AKO BI SISTEM BIO "IZMENLJIV" MOGAO BI SE REŠAVATI SAMO KADA BI POZNAVALI UNUTRAŠNJE SILE. AKO SU ONE NEPOZNATE PRIMENA TEOREME O PROMENI KIN. ENERG. NIJE DOVOLJNA ZA ODREĐIVANJE KRETANJA SISTEMA I OBIČNO SE TADA NE PRIMENJUJE.

KADA SU SPOLJAŠNJE SILE KONSTANTNE ILI ZAVISE SAMO OD RASTOJANJA TEOREMA O PROMENI KIN. ENERG. JE OPTIMALNA KADA TREBA ODREDITI KINEMATSKE VELIČINE (BRZINU, UBRZANJE, ...).



Sistem je u vertikalnoj ravni. Disk C poluprečnika R i mase m kotrlja se bez klizanja po horizontalnoj vezi. Obod diska C i teret A mase m spaja neistegljivo uže koje je prebačeno preko diska B mase m, poluprečnika r (između diska B i užeta nema proklizavanja). Ako je sistem u vertikalnoj ravni, odrediti brzinu i ubrzanje tereta A. $y(0)=0 \quad \dot{y}(0)=0.$

JEDAN STEPEN SLOBODE KRETANJA. PRATIMO TO KRETANJE, NA PRIMER, KOORDINATOM "y" (INERCIJALNOG SISTEMA Oy). ZA ODREĐIVANJE UZAJAMNE VEZE RUKOVODIMO SE BRZINOM KRETANJA UŽETA I APSOLUTNOM BRZINOM KRETANJA (TRANSLACIJE) TERETA A $\quad V_A = \dot{y}$

$$V_D = r\dot{\psi}, \quad \dot{\psi} = \frac{\dot{y}}{r}; \quad V_E = \dot{y} = 2R\dot{\varphi} \quad \dot{\varphi} = \frac{\dot{y}}{2R} \quad V_C = R\dot{\varphi} = \frac{\dot{y}}{2}.$$

KINETIČKA ENERGIJA SISTEMA JE: $\quad T = T_A + T_{DISKA(B)} + T_{DISKA(C)}$

TERET A "TRANSLACIJA" $\quad T_A = \frac{1}{2}m_A V_A^2 = \frac{1}{2}m\dot{y}^2$

DISK B "ROTACIJA [NEPOMIČNA OSA]" $\quad T_B = \frac{1}{2}J_{Bz}\dot{\psi}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\left(\frac{\dot{y}}{r}\right)^2 = \frac{1}{4}m\dot{y}^2$

DISK C "RAVNO KRETANJE" $\quad T_C = \frac{1}{2}m_C V_C^2 + \frac{1}{2}J_{Cz}\dot{\varphi}^2 \qquad T_C = \frac{1}{2}m\left(\frac{\dot{y}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{\dot{y}}{2R}\right)^2 = \frac{3}{16}m\dot{y}^2$

$$T = \sum_{i=1}^{3} T_i = \frac{15}{16}m\dot{y}^2$$

RAD SILA NA PROIZVOLJNOM POMERANJU "y" JE:

$$A(m_A\vec{g}) = mgy \quad \underbrace{A(m_B\vec{g}) = 0, \; A(\vec{N}_B) = 0}_{\text{SILE DEJSTVUJU U NEPOMIČNOJ TAČKI "B".}}, \; A(m_C\vec{g}) = 0, \; A(\vec{N}) = 0 \quad \underbrace{A(\vec{F}_{tr}) = 0}_{\int \vec{F}_{tr}\cdot\frac{d\vec{r}_{P_V}}{dt}dt = \int \vec{F}_{tr}\cdot\cancel{\vec{V}_{P_V}}^{\,0}dt = 0}$$

$$A = \sum_j A_j = mgy$$

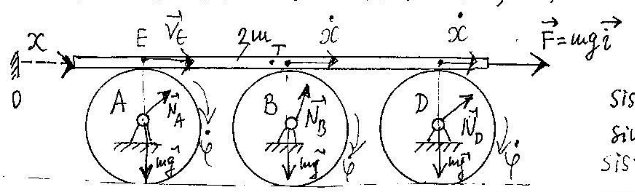
TEOREMA O PROMENI KIN. ENERG. U INTEGRALNOM OBLIKU: $\quad T - \cancel{T_0}^{\,0} = A^s + \cancel{A^u}^{\,0}$

$$\frac{15}{16}m\dot{y}^2 = mgy \qquad \dot{y}^2 = \frac{16}{15}gy \;\Big/\frac{d}{dt} \Rightarrow 2\dot{y}\ddot{y} = \frac{16}{15}g\dot{y} \Rightarrow \boxed{\ddot{y} = \frac{8}{15}g}$$

$\boxed{\text{NAPOMENA}}$: NAŠ MODEL JE "NEIZMENJIV" SISTEM PA MU JE RAD UNUTRAŠNJIH SILA NULA $[A^u = 0]$.
SILA TRENJA KOTRLJANJA OBEZBEĐUJE "KOTRLJANJE BEZ KLIZANJA", NJEN JE RAD JEDNAK NULI JER DEJSTVUJE U POLU BRZINA $A(F_{tr}) = 0$.

Zadatak koji sledi a koji smo rešili vektorskim teoremama dinamike veoma dobro ilustruje "lakoću" sa kojom sad, pomoću teoreme o promeni kinetičke energije, određujemo kinematske veličine (brzinu, ubrzanje,...).

①Sistem je u vertikalnoj ravni. Po diskovima (svaki je mase m i poluprečnika R), bez proklizavanja kreće se horizontalna letva mase 2m i dužine L; na letvu deluje sila F=mg (duž ose letve). Veze u tačkama A, B, D su zglobne. Odrediti: 1) kinetičku energiju sistema, 2) rad sila na proizvoljnom pomeranju "x", 3) ubrzanje letve (a_x=?). $x(0)=0;\ \dot x(0)=0.$



SISTEM JE "NEIZMENJIV", RAD UNUTRAŠNJIH SILA JE NULA.
SISTEM IMA JEDAN STEPEN SLOBODE KRETANJA, NEKA JE TO KOORDINATA "x", KINEMATSKE VEZE SU: $V_E = V_T = \dot x \quad R\dot\varphi = \dot x$

KINETIČKA ENERGIJA JE:

$$T = T_{DIS(A)} + T_{DIS(B)} + T_{DIS(D)} + T_{LETVE}$$

(*) KRETANJE LETVE JE $\boxed{\text{TRANSLATORNO}}$ $\Rightarrow$ $T_{LETVE} = \frac{1}{2} m_L V_T^2 = \frac{1}{2} 2m\dot x^2 = m\dot x^2$

(*) DISKOVI VRŠE $\boxed{\text{ROTACIJU OKO NEPOMIČNE OSE}}$ $T_A = \frac{1}{2} J_{Az}\dot\varphi^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{\dot x}{R}\right)^2 = \frac{1}{4} m\dot x^2$

SLIČNO $T_B = T_D = \frac{1}{4} m\dot x^2 \qquad T = \sum_{i=1}^{4} T_i = \frac{7}{4} m\dot x^2$

RAD SILA NA PROIZVOLJNOM POMERANJU "x":

$$A(\vec F) = \int \vec F \cdot d\vec r_T = \int_0^x mg\vec i \cdot (dx\,\vec i) = mgx$$

$$\underbrace{A(m_A\vec g) = A(m_B\vec g) = A(m_D\vec g) = 0}_{(h=0)} \qquad \underbrace{A(\vec N_A) = A(\vec N_B) = A(\vec N_D) = 0}_{(A,B,D \text{ SU NEPOMIČNE TAČKE})}$$

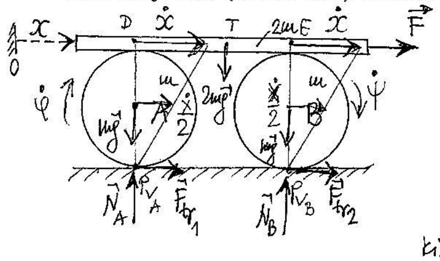
TEOREMA O PROMENI KIN. ENG. U INTEGRALNOM OBLIKU:

$$T - \cancel{T_0}^{\,0} = A^s + \cancel{A^u}_{\,0}$$

$$\frac{7}{4} m\dot x^2 = mgx \qquad \dot x^2 = \left(\frac{4}{7} g\right)x \Big/ \frac{d}{dt} \Rightarrow 2\dot x\ddot x = \frac{4}{7} g\dot x \Rightarrow \boxed{\ddot x = \frac{2}{7} g}$$

$\boxed{\text{NAPOMENA}}$: DA BI DOBILI TRAŽENO UBRZANJE "VEKTORSKIM TEOREMAMA" (PROMENA KOLIČINE KRETANJA; PROMENA MOMENTA KOLIČINE KRETANJA) BILO NAM JE POTREBNO "4" SKALARNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE...

Sistem je u vertikalnoj ravni. Diskovi A i B su svaki mase m i poluprečnika R i kortljaju se bez klizanja po horizontali. Letva je mase 2m i dužine L između nje i diskova nema proklizavanja, na letvu deluje sila F (duž ose letve). Odrediti: 1) kinetičku energiju sistema, 2) ubrzanje letve. $F = const$, $\dot x(0) = 0$, $x(0) = 0$.



SISTEM JE "NEIZMENJIV", RAD UNUTRAŠNJIH SILA JE NULA. SISTEM IMA JEDAN STEPEN SLOBODE KRETANJA, NEKA JE TO KOORDINATA x. KINEMATSKE VEZE:

$$v_D = v_E = v_T = \dot x \qquad \dot\varphi = \dot\psi = \frac{\dot x}{2R} \qquad v_A = v_B = \frac{\dot x}{2}.$$

KINETIČKA ENERGIJA JE: $T = T_{(A)\,diska} + T_{(B)\,diska} + T_{letve}$

(*) KRETANJE LETVE JE $\boxed{\text{TRANSLATORNO}}$ $\Rightarrow$ $T = \frac{1}{2}(2m)v_T^2 = m\dot x^2$

(*) DISK A KREĆE SE U KINEMATSKOM JEZIKU KAO $\boxed{\text{"RAVNO KRETANJE"}}$ PA MU JE KIN. ENER.

$$T = \frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}J_{Az}\dot\varphi^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{\dot x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{\dot x}{2R}\right)^2 = \frac{3}{16}m\dot x^2$$

(*) DISK B $\boxed{\text{"RAVNO KRETANJE"}}$ $\Rightarrow$ $T = \frac{1}{2}m_B v_B^2 + \frac{1}{2}J_{Bz}\dot\psi^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{\dot x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{\dot x}{2R}\right)^2 = \frac{3}{16}m\dot x^2$

UKUPNA KIN. ENER. $T = \sum_{i=1}^{3} T_i = \frac{11}{8}m\dot x^2$

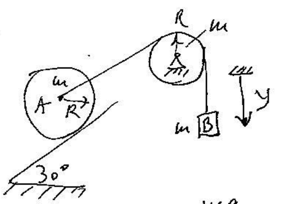
RAD SILA NA PROIZVOLJNOM POMERANJU "x":

$$\left\{\begin{array}{l} A(\vec F) = \int_0^x F\vec i\cdot(dx\,\vec i) = Fx \\ F = const \end{array}\right. \qquad \underbrace{A(m_A\vec g) = A(m_B\vec g) = 0}_{(h=0)}; \quad \underbrace{A(\vec N_A) = A(\vec N_B) = 0}_{(\cos 90^\circ = 0)}; \quad \underbrace{A(\vec F_{tr_1}) = A(\vec F_{tr_2}) = 0}_{\int \vec F_{tr}\cdot d\vec r_{P_V} = 0}$$

TEOREMA: $T - \cancel{T_0}^{\,0} = A^s + \cancel{A^u}_{\,0}$

$$\frac{11}{8}m\dot x^2 = Fx \qquad \dot x^2 = \frac{8}{11}\left(\frac{F}{m}\right)x \Big/ \frac{d}{dt} \Rightarrow 2\dot x\ddot x = \frac{8}{11}\left(\frac{F}{m}\right)\dot x \Rightarrow \boxed{\ddot x = \frac{4}{11}\left(\frac{F}{m}\right)}$$

NAPOMENA: SAMOSTALNO URADITI ZADATAK; URADILI SMO GA VEKTORSKIM METODOM. U PRILOGU JE DAT ZADATAK (ZA ONE KOJI TADA NISU BILI NA ČASU). POKAZATI DA JE $\ddot y = a_B = \frac{g}{6}$,



$T = \frac{3}{2}m\dot y^2$; $A = \frac{mg}{2}y$.