

## 4. Функције више променљивих - диференцијални рачун

### 4.1. Основни појмови

Функција  $n$  променљивих је нека функција облика

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где су  $x_1, \dots, x_n$  реалне променљиве. Пошто су  $n$ -торке  $(x_1, \dots, x_n)$  елементи  $n$ -димензионалног простора  $\mathbb{R}^n$ , реч је о функцији дефинисаној на простору  $\mathbb{R}^n$  или на неком његовом подскупу  $D$ . Тај подскуп  $D \subset \mathbb{R}^n$  је *домен* функције  $f$ . Зато кажемо да је  $f$  пресликавање из  $D$  у  $\mathbb{R}$  и означавамо  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ .

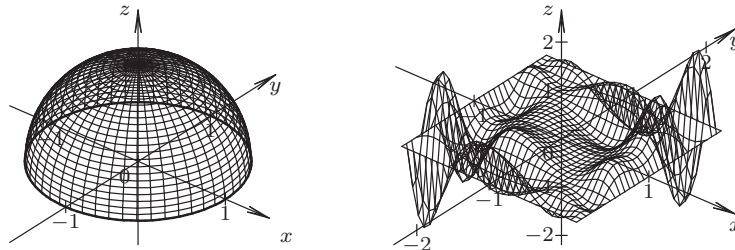
Примери оваквих функција су свуда:

- Површина правоугаоника са страницама  $x$  и  $y$  је функција две променљиве  $x$  и  $y$ :  $f(x, y) = xy$ ;
- Температура ваздуха у тачки са координатама  $(x, y, z)$  је функција три променљиве  $x, y, z$ .

Ако је  $f(x, y)$  функција двеју променљивих дефинисана за  $(x, y) \in D$ , њен *график* је скуп одговарајућих тачака  $(x, y, f(x, y))$  у тродимензионалном простору. Овај график је обично нека површ.

Пример 4.1. На слици лево је график функције  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  за  $(x, y)$  на кругу  $x^2 + y^2 \leq 1$ . То је горња полусфера са центром у координатном почетку и полупречником 1

На слици десно је график функције  $z = (x + y) \sin(4 - 4x^2) \sin(9 - 9y^2)$  за  $-1 \leq x, y \leq 1$ .



У општем случају, ако је  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  функција  $n$  променљивих на скупу  $D \subset \mathbb{R}^n$ , њен *график* је скуп тачака  $(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n))$ , тј.  $(a, f(a))$  за  $a = (x_1, \dots, x_n) \in D$ . У овом случају график је подскуп скупа  $D \times \mathbb{R}$ , а он лежи у простору  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Подсетимо се да је растојање између тачака  $A(a_1, \dots, a_n)$  и  $B(b_1, \dots, b_n)$  у простору  $\mathbb{R}^n$  дато формулом

$$d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}.$$

За функције више променљивих, лимес и непрекидност се уводе слично као за функције једне променљиве.

Нека је  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  функција на скупу  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  и нека је  $\mathbf{a} \in D$ .

Формална дефиниција 4.1. Лимес  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x})$  је једнак  $t$  ако за свако  $\varepsilon > 0$  постоји  $\delta > 0$  такво да важи  $|f(\mathbf{x}) - t| < \varepsilon$  кад год је  $0 < d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \delta$ .

Другим речима: Кад се тачка  $\mathbf{x}$  приближава тачки  $\mathbf{a}$ , вредност функције  $f(\mathbf{x})$  се приближава вредности  $t$ .

Формална дефиниција 4.2. Функција  $f$  је непрекидна у тачки  $\mathbf{a}$  ако је  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$ .

Функција  $f$  је непрекидна на скупу  $D$  ако је непрекидна у свакој тачки тог скупа.

Дружим речима: Функција  $f$  је непрекидна ако мале промене променљивих узрокују мале промене вредности функције.

## 4.2. Парцијални изводи

Посматрајмо функцију  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  по  $n$  променљивих. Дакле,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , где је  $D$  нека област у простору  $\mathbb{R}^n$ . Нека је  $\mathbf{a} \in D$  нека тачка у домену функције.

*Парцијални извод* функције  $f$  по њеној  $i$ -тој променљивој (тј.  $x_i$ ) представља извод функције  $f$  посматране као функције по једној променљивој  $x_i$ , сматрајући да су све остале променљиве фиксирани.

Формална дефиниција 4.3. Први парцијални извод функције  $f$  по  $i$ -тој променљивој  $x_i$  у датој тачки  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$  је

$$f'_{x_i}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + h, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)}{h},$$

ако овај лимес постоји.

Дружим речима: Парцијални извод  $f'_{x_i}$  представља стопу раста (или пада) функције  $f$  у зависности од њене  $i$ -те променљиве.

Ако парцијални извод  $f'_{x_i}(\mathbf{a})$  постоји, кажемо да је функција  $f$  диференцијабилна по променљивој  $x_i$  у тачки  $\mathbf{a}$ . Функција је непрекидно диференцијабилна по  $x_i$  ако је  $f'_{x_i}(\mathbf{a})$  непрекидна функција по  $\mathbf{a}$ .

Функција  $f$  је непрекидно диференцијабилна ако је непрекидно диференцијабилна по свакој променљивој, и то у унутрашњости целог домена.

Градијент функције  $f$  је вектор

$$\text{grad } f(\mathbf{a}) = (f'_{x_1}(\mathbf{a}), \dots, f'_{x_n}(\mathbf{a})).$$

Први диференцијал функције  $f$  у тачки  $\mathbf{a}$  је

$$df(\mathbf{a}) = f'_{x_1}(\mathbf{a})dx_1 + f'_{x_2}(\mathbf{a})dx_2 + \dots + f'_{x_n}(\mathbf{a})dx_n = \text{grad } f(\mathbf{a}) \cdot \vec{dx},$$

где је  $\vec{dx} = (dx_1, \dots, dx_n)$ . На десној страни горње једнакости је, наравно, скаларни производ вектора  $\text{grad } f(\mathbf{a})$  и  $\vec{dx}$ .

Дружим речима: Диференцијал  $df(\mathbf{a})$  представља (бесконечно малу) промену функције  $f$  при померању тачке  $\mathbf{a}$  за бесконачно мали вектор  $\vec{dx}$ .

Парцијални изводи представљају изводе функције дуж координатних оса у позитивном смеру. По аналогији, може се увести и извод функције  $f$  у смеру датог вектора  $\vec{v}$ :

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\vec{v}) - f(\mathbf{a})}{h|\vec{v}|}.$$

Како је  $f(\mathbf{a} + h\vec{v}) = f(\mathbf{a}) + \text{grad } f(\mathbf{a}) \cdot h\vec{v} + o(h)$  када  $h \rightarrow 0$ , имамо

Шерђење 4.1. Извод у смеру вектора  $\vec{v}$  једнак је  $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\mathbf{a}) = \text{grad } f(\mathbf{a}) \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ .

Овај израз је највећи када вектори  $\text{grad } f(\mathbf{a})$  и  $\vec{v}/|\vec{v}|$  имају исти смер.

Дружим речима: Функција најбрже расте у смеру свог градијента (ако он није  $\vec{0}$ ).

Пример 4.2. Дате су функција  $f(x, y) = x^2y$ , тачка  $A(1, 1)$  и вектор  $\vec{v} = (1, 1)$ .

(а) Парцијални извод  $f'_x$  налазимо фиксирањем друге променљиве  $y$  (као да је константа):  $f'_x = \frac{d}{dx}(x^2y) = \frac{d}{dx}(x^2) \cdot y = 2xy$ . Слично,  $f'_y = \frac{d}{dy}(x^2y) = x^2 \cdot \frac{d}{dy}(y) = x^2$ .

(б) Њен градијент је  $\text{grad } f(x, y) = (2xy, x^2)$ . У тачки  $A$  он је једнак  $\text{grad } f(A) = (2, 1)$ .

(в) Први диференцијал је  $df = 2xy dx + x^2 dy$ .

(г) Извод у правцу вектора  $\vec{v}$  у тачки  $A$  је

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(A) = \text{grad } f(A) \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = (2, 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1) = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Парцијални изводи задовољавају исте релације као и обични изводи:

$$(f + g)'_{x_i} = f'_{x_i} + g'_{x_i}, \quad (fg)'_{x_i} = f'_{x_i}g + fg'_{x_i}, \quad \left(\frac{f}{g}\right)'_{x_i} = \frac{f'_{x_i}g - fg'_{x_i}}{g^2}.$$

Испитајмо шта се дешава за сложене функције. Нека су  $g_1, \dots, g_n$  непрекидно диференцијабилне функције по  $k$  променљивих  $x_1, \dots, x_k$ . На тај начин  $f(g_1, \dots, g_n)$  представља сложену функцију по  $x_1, \dots, x_k$ . Претпоставимо да се променљива  $x_i$  увећа за  $h$ .

– Тада се  $g_j$  увећава за  $\Delta g_j = \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \cdot h + o(h)$  када  $h \rightarrow 0$ ;

– При томе,  $f$  се увећава за  $\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial g_j} \cdot \Delta g_j + o(h) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial g_j} \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \cdot h + o(h)$ .

Добијамо следеће тврђење.

Шерђеје 4.2. Ако су функције  $f(g_1, \dots, g_n)$  и  $g_i(x_1, \dots, x_k)$  за  $1 \leq i \leq n$  диференцијабилне, онда је

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial g_j} \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_i}.$$

Функција  $f$  може да буде задата и имплицитно, једначином облика  $g(x_1, \dots, x_n, f) = 0$ . У том случају, претходно тврђење о сложеној функцији нам даје  $0 = \frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{\partial g}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial x_i}$ , што нам даје:

Шерђеје 4.3. Ако је функција  $f$  имплицитно задата једначином  $g(x_1, \dots, x_n, f) = 0$ , онда су њени парцијални изводи

$$f'_{x_i} = -\frac{g'_{x_i}}{g'_f} = -\frac{\partial g / \partial x_i}{\partial g / \partial f}.$$

Пример 4.3. Реална функција  $z(x, y)$  је задата једнакошћу

$$f(x, y, z) = z^3 + xz - y = 0.$$

Одредити парцијалне изводе  $z_x$  и  $z_y$  у тачки  $(x, y) = (1, 2)$ .

Решење. Свакако је

$$z_x = -\frac{f_x}{f_z} = -\frac{z}{3z^2 + x} \quad \text{и} \quad z_y = -\frac{f_y}{f_z} = \frac{1}{3z^2 + x}.$$

Међутим, вредност функције  $z$  у тачки  $(1, 2)$  нам није дата. Њу одређујемо решавањем једначине по  $z$ :

$$z^3 + z - 2 = 0,$$

тј.  $(z - 1)(z^2 + z + 2) = 0$ , одакле налазимо  $z = z(1, 2) = 1$ .

Најзад, за  $(x, y, z) = (1, 2, 1)$  добијамо  $z_x = -\frac{1}{4}$  и  $z_y = \frac{1}{4}$ .

### 4.3. Парцијални изводи вишег реда

Индуктивно се уводе парцијални изводи вишег реда. На пример, други парцијални извод функције  $f$  по променљивим  $x_i$  и  $x_j$  је

$$f''_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right),$$

итд.

Испоставља се да мешовити парцијални изводи вишег реда не зависе од редоследа диференцирања, под условом да је функција  $f$  непрекидно диференцијабилна довољан број пута:

Шерђење 4.4. Ако је функција  $f$  двапут непрекидно диференцијабилна, важи

$$f''_{x_i x_j} = f''_{x_j x_i}.$$

Слично, ако је функција  $f$  непрекидно диференцијабилна  $k$  пута, мешовити парцијални изводи  $k$ -тог реда не зависе од редоследа диференцирања.

Такође се индуктивно уводе диференцијали вишег реда:

$$d^k f = d(d^{k-1} f),$$

где  $dx_i$  третирамо као константе. Тако је

$$d^2 f = \sum_{i,j} f''_{x_i x_j} dx_i dx_j, \quad d^3 f = \sum_{i,j,k} f'''_{x_i x_j x_k} dx_i dx_j dx_k, \quad \text{итд.}$$

Видимо да је диференцијал  $d^k f$  полином степена  $k$  по  $dx_1, \dots, dx_n$ .

У случају функције две променљиве, једноставном индукцијом се показује да за ове диференцијале важи формула налик на биномну:

Шерђење 4.5. Ако је  $f = f(x, y)$ , онда је

$$d^n f = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-i} \partial y^i} dx^{n-i} dy^i.$$

где  $\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-i} \partial y^i}$  означава  $n$ -ти парцијални извод функције  $f$  добијен диференцирањем  $n-i$  пута по  $x$  и  $i$  пута по  $y$ .

Пример 4.4. Наћи први и други диференцијал функције  $f(x, y) = xe^{x-y}$ .

Решење. Парцијални изводи првог и другог реда су

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= (x+1)e^{x-y}, \\ f_y(x, y) &= -xe^{x-y}, \\ f_{xx}(x, y) &= (x+2)e^{x-y}, \\ f_{xy}(x, y) &= f_{yx}(x, y) = -(x+1)e^{x-y}, \\ f_{yy}(x, y) &= xe^{x-y}. \end{aligned}$$

Према томе,

$$df(x, y) = (x+1)e^{x-y} dx - xe^{x-y} dy$$

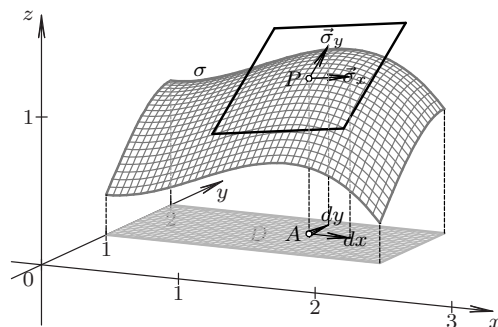
и

$$d^2 f(x, y) = (x+2)e^{x-y} dx^2 - 2(x+1)e^{x-y} dx dy + xe^{x-y} dy^2.$$

#### 4.4. Тангентна равна и нормала на површ

Један од начина на који се површ  $\sigma$  у  $xyz$ -простору може задати је експлицитан - као график неке функције  $z = z(x, y)$ . Посматрајмо неку тачку  $P(x_0, y_0, z(x_0, y_0))$  на површи  $\sigma$ . Она одговара тачки  $A(x_0, y_0)$  у  $xy$ -равни. Ако се тачка  $A$  помери у правцу  $x$ -осе за  $dx$ , вредност  $z(A)$  промениће се за  $z'_x(A)dx$ , тако да ће се тачка  $P$  на површи померити тангентно на равна, за вектор  $(1, 0, z'_x(A))dx$ . Слично, ако се тачка  $A$  помери у правцу  $y$ -осе за  $dy$ , тачка  $P$  ће се померити за вектор  $(0, 1, z'_y(A))dy$  у тангентној равни. Према томе, тангентна равна је равна кроз тачку  $P$  одређена векторима

$$\sigma_x = (1, 0, z'_x(A)) \quad \text{и} \quad \sigma_y = (0, 1, z'_y(A)).$$



Сада лако налазимо и нормалу у тачки  $P$  на површ, тј. на ову тангентну раван:

$$\vec{n} = \sigma_x \times \sigma_y = (-z'_x(A), -z'_y(A), 1).$$

Сада тангентна раван у тачки  $P$  има једначину

$$-z'_x(A) \cdot (x - x_0) - z'_y(A) \cdot (y - y_0) + (z - z_0) = 0.$$

Слично поступамо и ако нам је површ  $\sigma$  задата имплицитно или параметарски. Све у свему:

Шерђеје 4.6. Нека је  $P$  тачка на глаткој површи  $\sigma$ , а  $\vec{n}$  нормала на површ у тачки  $P$ .

- Ако је  $\sigma$  дата експлицитно, тј. условом  $z = z(x, y)$ , може се узети  $\vec{n} = (-z'_x(A), -z'_y(A), 1)$ ;
- Ако је  $\sigma$  дата имплицитно, тј. условом  $f(x, y, z) = 0$ , може се узети  $\vec{n} = (f'_x(P), f'_y(P), f'_z(P))$ ;
- Ако је  $\sigma$  дата параметарски, тј. условима  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$  и  $z = z(u, v)$ , може се узети  $\vec{n} = \vec{\sigma}_u \times \vec{\sigma}_v$ , где су  $\vec{\sigma}_u = (x'_u, y'_u, z'_u)$  и  $\vec{\sigma}_v = (x'_v, y'_v, z'_v)$ .

Најзад, једначина одговарајуће тангентне равни је

$$n_x \cdot (x - x_0) + n_y \cdot (y - y_0) + n_z \cdot (z - z_0) = 0,$$

где је  $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$  вектор нормале.

Пример 4.5. Наћи тангентну раван на сферу  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  у тачки  $A(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ .

Решење. Овде је  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ .

Нормала у тачки  $A$  је

$$\vec{n} = (f_x(A), f_y(A), f_z(A)) = (2x, 2y, 2z) = (\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}).$$

Тангентна раван је  $\frac{2}{3} \cdot (x - \frac{1}{3}) + \frac{4}{3} \cdot (y - \frac{2}{3}) - \frac{4}{3} \cdot (z + \frac{2}{3}) = 0$ , тј.

$$x + 2y - 2z - 3 = 0.$$

#### 4.5. Задачи

1. Дата је функција  $f(x, y) = \sqrt{2u - v}$ , где је  $u = x^2y^2$  и  $v = 2x + y$ . Одредити  $f'_x$  и  $f'_y$  (а) директно; (б) коришћењем правила о парцијалним изводима сложене функције (и уверити се да је исти резултат).
2. Одредити прве и друге парцијалне изводе функције  $z(x, y) = x^y \cdot y^2$ .
3. Нека је  $f$  диференцијабилна функција и  $z(x, y) = xf(\ln x - \ln y)$ . Доказати да важи  $xz'_x + yz'_y = z$ .
4. Наћи први диференцијал функције  $f(x, y, z) = \frac{x^2z}{x+y+z}$ .
5. Наћи други диференцијал функције  $f(x, y) = e^{x+y} \sin x \cos y$ .
6. Нека је  $x = u^3 + v$ ,  $y = u + v^3$  и  $z = u + v$ . Познато је да је  $z(3, 9) = 3$ . Одредити извод  $z'_x$  у тачки  $(x, y) = (3, 9)$ .
7. Одредити тангентну раван и вектор нормале на површ дату једначином  $z = xy$  за  $(x, y) = (3, 1)$ .
8. Одредити тангентну раван и вектор нормале на површ дату једначином  $x^3 + y^3 + z^3 + 4xyz = 0$  у тачки  $(2, 1, -1)$ .
9. Одредити тангентну раван на површ  $\pi$  дату параметарски:  $(x, y, z) = (u + v^2, u^2 + v^3, u^3 + v)$  у тачки у којој је  $u = v = 1$ .
10. На површи датој једначином  $xy + z^2 = 1$  наћи тачку у којој је тангентна раван нормална на праву  $x = y = z$ .
11. Одредити тачку у којој тангентна раван на површ  $z = x^2 + y^2$  садржи тачке  $A(1, 0, 0)$  и  $B(0, 2, 0)$ .

#### 4.6. Решења

1. (а) Пошто је  $f(x, y) = \sqrt{2x^2y^2 - 2x - y}$ , следи  $f'_x = \frac{4xy^2 - 2}{2\sqrt{2x^2y^2 - 2x - y}}$  и  $f'_y = \frac{4x^2y - 1}{2\sqrt{2x^2y^2 - 2x - y}}$ .

$$(б) f'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x = \frac{2}{2\sqrt{2u-v}} \cdot 2xy^2 + \frac{-1}{2\sqrt{2u-v}} \cdot 2 = \frac{4xy^2 - 2}{2\sqrt{2x^2y^2 - 2x - y}};$$

$$f'_y = f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y = \frac{2}{2\sqrt{2u-v}} \cdot 2x^2y + \frac{-1}{2\sqrt{2u-v}} \cdot 1 = \frac{4x^2y - 1}{2\sqrt{2x^2y^2 - 2x - y}}.$$

2. Извод  $z'_x$  добијамо ако фиксирамо  $y$  (као да је константа), тако да је  $z'_x = x^{y-1}y^3$ . За  $z'_y$  по правилу производа добијамо  $z'_y = \frac{\partial x^y}{\partial y} \cdot y^2 + x^y \cdot \frac{\partial (y^2)}{\partial y} = x^y y (y \ln x + 2)$ .

Одавде даље добијамо  $z_{xx} = x^{y-2}y^3(y-1)$ ,  $z_{xy} = z_{yx} = x^{y-1}y^2(y \ln x + 3)$  и  $z_{yy} = x^y(y^2 \ln^2 x + 4y \ln x + 2)$ .

3. Имамо  $z'_x = f(\ln x - \ln y) + x f'(\ln x - \ln y) \frac{1}{x} = 2f(\ln x - \ln y)$  и  $z'_y = x f'(\ln x - \ln y) \left(-\frac{1}{y}\right) = -\frac{x}{y} f'(\ln x - \ln y)$ , па је  $xz'_x + yz'_y = 2xf - xf = xf = z$ .

4. Како је  $f'_x = \frac{xz(x+2y+2z)}{(x+y+z)^2}$ ,  $f'_y = \frac{-x^2z}{(x+y+z)^2}$  и  $f'_z = \frac{x^2(x+y)}{(x+y+z)^2}$ , следи да је

$$df = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz = \frac{xz(x+2y+2z)dx - x^2z dy + x^2(x+y)dy}{(x+y+z)^2}.$$

5. Лако налазимо

$$f'_x = e^{x+y}(\sin x + \cos x) \cos y, \quad f'_y = e^{x+y} \sin x(\cos y - \sin y)$$

и одатле

$$f''_{xx} = 2e^{x+y} \cos x \cos y, \quad f''_{xy} = e^{x+y}(\sin x + \cos x)(\cos y - \sin y), \quad f''_{yy} = -2e^{x+y} \sin x \sin y.$$

Према томе,  $d^2f = f''_{xx} dx^2 + 2f''_{xy} dx dy + f''_{yy} dy^2 = 2e^{x+y}[\cos x \cos y dx^2 + (\sin x + \cos x)(\cos y - \sin y) dx dy - \sin x \sin y dy^2]$ .

6. Одредимо прво  $u$  и  $v$  ако је  $(x, y, z) = (3, 9, 3)$ . Из  $u^3 + v = u + v = 3$  следи  $u^3 - u = 0$ , тј.  $u \in \{-1, 0, 1\}$ . Провером добијамо  $u = 1$  и  $v = 2$ .

Ако посматрамо  $x$ ,  $y$  и  $z$  као функције по  $u$  и  $v$ , видимо да су њихови диференцијали  $dx = 3u^2 du + dv$ ,  $dy = du + 3v^2 dv$  и  $dz = du + dv$ . Из прве две једначине решавањем система добијамо  $du = \frac{3v^2 dx - dy}{9u^2 v^2 - 1}$  и  $dv = \frac{3u^2 dy - dx}{9u^2 v^2 - 1}$ , па је  $dz = du + dv = \frac{3v^2 - 1}{9u^2 v^2 - 1} dx + \frac{3u^2 - 1}{9u^2 v^2 - 1} dy$ . Према томе,  $z'_x = \frac{3v^2 - 1}{9u^2 v^2 - 1}$ . За  $(u, v) = (1, 2)$  је  $z'_x = \frac{11}{35}$ .

7. За дате  $x$  и  $y$ , вектор нормале је  $\vec{n} = (-z'_x, -z'_y, 1) = (-y, -x, 1) = (-1, -3, 1)$ . Како је  $z(3, 1) = 3$ , одговарајућа тачка на површи је  $(3, 1, 3)$ , а тангентна раван у њој је  $-1(x-3) - 3(y-1) + 1(z-3) = 0$ , тј.  $-x - 3y + z = -3$ .

8. Означимо  $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + 4xyz$ . Тада је  $\vec{n} = (f_x, f_y, f_z) = (3x^2 + 4yz, 3y^2 + 4xz, 3z^2 + 4xy)$ . За  $(x, y, z) = (2, 1, -1)$ , вектор нормале је  $\vec{n} = (8, -5, 11)$ . Тангентна раван је  $8x - 5y + 11z = 8 \cdot 2 - 5 \cdot 1 + 11(-1) = 0$ .

9. За  $u = v = 1$  је  $(x, y, z) = (2, 2, 2)$ .

У овој тачки имамо  $\vec{\pi}_u = (1, 2u, 3u^2) = (1, 2, 3)$  и  $\vec{\pi}_v = (2v, 3v^2, 1) = (2, 3, 1)$ , па је  $\vec{n} = \vec{\pi}_u \times \vec{\pi}_v = (-7, 5, -1)$ . Тангентна раван је  $-7(x-2) + 5(y-2) - (z-2) = 0$ , тј.  $-7x + 5y - z + 6 = 0$ .

10. Ако означимо  $f(x, y, z) = xy + z^2 - 1$ , нормала у произвољној тачки  $(x, y, z)$  на површи је  $\vec{n} = (f'_x, f'_y, f'_z) = (y, x, 2z)$ . По услову задатка, овај вектор је колинеаран с вектором  $(1, 1, 1)$ , па је  $y = x = 2z$ . Заменом у једначину  $xy + z^2 = 1$  добијамо  $5z^2 = 1$ , тј.  $z = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$ , чиме добијамо два решења:  $(x, y, z) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$  или  $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ .

11. За  $(x, y) = (a, b)$  је  $\vec{n} = (-z'_x, -z'_y, 1) = (-2a, -2b, 1)$ , а тангентна раван је  $-2a(x-a) - 2b(y-b) + (z-a^2-b^2) = 0$ , тј.  $-2ax - 2by + z + (a^2 + b^2) = 0$ . Увршћивањем тачака  $A$  и  $B$  у једначину равни добијамо  $a^2 + b^2 = 2a$  и  $a^2 + b^2 = 4b$ , а одавде је  $a = 2b$  и  $5b^2 = 4b$ , тј.  $(a, b) = (0, 0)$  или  $(a, b) = \left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right)$ . Дакле, постоје две тражене тачке:  $(0, 0, 0)$  и  $\left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}, \frac{16}{5}\right)$ .

