rmutavdzic@mas.bg.ac.rs

Први колоквијум (пример 1)

1. Израчунати интеграл $\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}}$.

2. Израчунати интеграл $\int_0^1 x^2 \ln(1+3x^2)\,\mathrm{d}x$.

3. Наћи $\int_0^\pi \frac{\sin 153x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$.

4. Наћи запремину тела насталог ротацијом криве $y = \left(x^2+\frac{3}{x^2}\right)^{-3/4}$ око x-осе за $x \geqslant 0$.

Решења.

1. Решавамо помоћу неколико очигледних смена:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^5}} = \begin{bmatrix} x = t^3 \\ \mathrm{d}x = 3t^2\,\mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int \frac{3t^2\,\mathrm{d}t}{t^3+t+t^5} = 3\int \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t^2+t^4} = \begin{bmatrix} t^2 = u \\ 2t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}u \end{bmatrix}$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u+u^2} = \frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = 2\int \frac{\mathrm{d}u}{((2u+1)/\sqrt{3})^2+1} = \begin{bmatrix} (2u+1)/\sqrt{3} = p \\ 2\,\mathrm{d}t/\sqrt{3} = \mathrm{d}p \end{bmatrix}$$

$$= \sqrt{3}\int \frac{\mathrm{d}p}{p^2+1} = \sqrt{3}\operatorname{arctg} p + c = \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt{3}} + c.$$

2. Овде користимо парцијалну интеграцију:

$$\int_0^1 x^2\ln(1+3x^2)\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = \ln(1+3x^2) & \mathrm{d}v = x^2\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \frac{6x}{1+3x^2}\,\mathrm{d}x & v = \frac{x^3}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln(1+3x^2)\Big|_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x^4}{1+3x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{2}{9}\int_0^1 \frac{9x^4-1+1}{3x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{2}{9}\int_0^1 (3x^2-1)\,\mathrm{d}x - \frac{2}{9}\int_0^1 \frac{dx}{1+3x^2} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}x = t \\ \sqrt{3}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{bmatrix}$$

$$= \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{2}{9}(x^3-x)\Big|_0^1 - \frac{2}{9\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{2}{9\sqrt{3}}\operatorname{arctg} t\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{2\pi}{27\sqrt{3}} \approx 0,32774.$$

3. Означимо $I_n = \int_0^\pi \frac{\sin nx}{x}\,\mathrm{d}x$ и пођимо од израза $I_n - I_{n-2}$. Ако искористимо формулу $\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$, тај израз се своди на

$$I_n - I_{n-2} = 2\int_0^\pi \frac{\cos(n-1)x\sin x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n-1}\sin(n-1)x\Big|_0^\pi = 0,$$

па је $I_n = I_{n-2}$. У нашем случају је $I_{153} = I_{151} = \cdots = I_1 = \int_0^\pi dx = \pi$.

4. Знамо да је запремина тела добијена ротацијом криве $y = y(x)$ око $x-$осе за $x \in [a,b]$ једнака $\pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. У нашем случају запремина V ће бити несвојствени интеграл

$$\pi\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+3/x^2)^{3/2}} = \pi\lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{(x^4+3)^{3/2}}.$$

Увођењем смене $x^4+4 = t$, $4x^3\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, при чему је $t = 3$ када је $x = 0$ и $t = b^4+3$ када је $x = b$, добијамо

$$V = \frac{\pi}{4}\lim_{b\to\infty}\int_3^{b^4+3} t^{-3/2}\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2}\lim_{b\to\infty} t^{-1/2}\Big|_3^{b^4+3} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0,9069.$$

Први колоквијум (пример 2)

1. Израчунати $\int x^2 \operatorname{arctg} 2x^2 \, \mathrm{d}x$.

2. Израчунати $\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+x}}$.

3. Израчунати $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}$.

4. Наћи дужину лука криве $y = \ln\cos x$ за $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

Решења.

1. Ако са I означимо полазни интеграл и применимо парцијалну интеграцију $\operatorname{arctg} 2x^2 = u$, $\frac{4x}{1+4x^4}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$, $x^2\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}v$, $x^3/3 = v$, добијамо
$$I = \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} 2x^2 - \frac{1}{3}\int \frac{4x^4+1-1}{1+4x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} 2x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}I_1,$$
Где је $I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{1+4x^4}$. Да бисмо нашли овај интеграл, напишимо $\frac{1}{4x^4+1} = \frac{Ax+B}{2x^2+2x+1} + \frac{Cx+D}{2x^2-2x+1}$. Решавањем одговарајућег система налазимо да је $A = B = D = \frac{1}{2}$ и $C = -\frac{1}{2}$, одакле је $I_1 = \frac{1}{8}\int \frac{4x+2+2}{2x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{8}\int \frac{4x-2-2}{2x^2-2x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\ln\frac{2x^2+2x+1}{2x^2-2x+1} + \frac{1}{4}\operatorname{arctg}(2x+1) + \frac{1}{4}\operatorname{arctg}(2x-1) + c$.
Дакле, $I = \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} 2x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{24}\ln\frac{2x^2+2x+1}{2x^2-2x-1} + \frac{1}{12}\operatorname{arctg}(2x+1) + \frac{1}{12}\operatorname{arctg}(2x-1) + c$.

2. Ако уведемо Ојлерову смену $\sqrt{x^2+x} = t - x$, $x = \frac{t^2}{1+2t}$, $\mathrm{d}x = \frac{2t(t+1)}{(2t+1)^2}\,\mathrm{d}t$, полазни интеграл I се своди на
$$I = \int \frac{2t(t+1)}{t(2t+1)^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{2t+1+1}{(2t+1)^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}t}{2t+1} + \int \frac{\mathrm{d}t}{(2t+1)^2},$$
одакле сменом $2t+1 = u$, $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u/2$ добијамо
$$I = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = \frac{1}{2}\ln u - \frac{1}{2u} + c.$$
Враћањем на полазну промењљиву добијамо
$$I = \frac{1}{2}\ln(2x + 2\sqrt{x^2+x} + 1) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x + 2\sqrt{x^2+x} + 1} + c.$$
Ако приметимо да је $(2\sqrt{x^2+x} + 2x + 1)(2\sqrt{x^2+x} - 2x - 1) = -1$, тада је
$$I = \frac{1}{2}\ln(2x + 2\sqrt{x^2+x} + 1) + \sqrt{x^2+x} - x + c.$$

3. Дати интеграл I је несвојствен - има неограничену горњу границу и подинтегрална функција није дефинисана за $x = 1$. Зато ћемо га написати као збир два интеграла $I = I_1 + I_2$, при чему је $I_1 = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}$ и $I_2 = \int_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}$. Израчунајмо прво неодређени интеграл
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}} = \left[\begin{array}{c}\sqrt{x-1} = t,\ x = t^2+1 \\ \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t\end{array}\right] = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = 2\operatorname{arctg} t + c = 2\operatorname{arctg}\sqrt{x-1} + c.$$
Тада је $I_1 = \lim_{a\to 1} 2\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}\big|_a^2 = \frac{\pi}{2}$, и $I_2 = \lim_{b\to\infty} 2\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}\big|_2^b = \pi - \frac{\pi}{2}$ па ј $I = \pi$.

4. Дужина лука криве $y = y(x)$ за $x \in [a,b]$ се рачуна по формули $L = \int_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2}\,\mathrm{d}x$. У нашем случају је $1 + (y'(x))^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 x = 1/\cos^2 x$, па је $L = \int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{1-\sin^2 x}$. Увођењем смене $\sin x = t$, $\cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, $t = 0$ за $x = 0$ и $t = 1/\sqrt{2}$ за $x = \pi/4$ добијамо да је $L = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|\Big|_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \ln(\sqrt{2}+1) \approx 0,8814$.

Први колоквијум (пример 3)

1. Наћи неодређени интеграл $\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x/2}}$.

2. Израчунати $\int_{-1}^{1} \frac{1-\sqrt{1+x}}{1-\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$.

3. Наћи неодређени интеграл $\int (2x-1)\ln x \ln(x-1)\,\mathrm{d}x$.

4. Крива $y=\sqrt{x}\cdot\sin x$ $(0\leqslant x\leqslant \pi)$ ротира око x-осе. Одредити запремину добијеног тела.

Решења.

1. Означимо са I полазни интеграл. Множењем и дељењем подинтегралне функције са $e^{x/2}$ добијамо $I=\int \frac{e^{x/2}}{e^{3x/2}+1}\,\mathrm{d}x$. Овај интеграл се сменом $e^{x/2}=t$, $e^{x/2}\,\mathrm{d}x=2\,\mathrm{d}t$ своди на интеграл рационалне функције, па је $I=2\int\frac{\mathrm{d}t}{t^3+1}$. Даље је $\frac{1}{t^3+1}=\frac{A}{t+1}+\frac{Bt+C}{t^2-t+1}$, за неке константе A, B и C које налазимо изједначавањем коефицијената на левој и десној страни одговарајуће једначине. Овде је $A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{1}{3}$ и $C=\frac{2}{3}$, па је
$$I=\frac{2}{3}\int\frac{\mathrm{d}t}{t+1}+\frac{2}{3}\int\frac{-t+2}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t=\frac{2}{3}\ln(t+1)-\frac{1}{3}\int\frac{2t-1-3}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t=\frac{2}{3}\ln(t+1)-\frac{1}{3}\ln(t^2-t+1)+I_1,$$
где је $I_1=\int\frac{\mathrm{d}t}{(t-1/2)^2+3/4}=\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}+c$, па је
$$I=\frac{2}{3}\ln(e^{x/2}+1)-\frac{1}{3}\ln(e^x-e^{x/2}+1)+\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2e^{x/2}-1}{\sqrt{3}}+c.$$

2. Ако уведемо смену $\cos x=t$, $-\sin x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$, $t=\pi$ за $x=-1$ и $t=0$ за $x=1$, полазни интеграл I се трансформише у интеграл $\int_0^\pi \frac{1-\sqrt{2}\cos t/2}{1-\sqrt{2}\sin t/2}\sin t\,\mathrm{d}t$. Сада можемо користити адиционе формуле $\cos a-\cos b=-2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$ и $\sin a-\sin b=2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$, па је
$$\frac{1-\sqrt{2}\cos\frac{t}{2}}{1-\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}}=\frac{\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{\pi}{4}-\sin\frac{t}{2}}=\frac{-2\sin\left(\frac{t}{4}-\frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{t}{4}+\frac{\pi}{8}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{4}-\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{t}{4}+\frac{\pi}{8}\right)}.$$
Дакле, $I=-\int_0^\pi \mathrm{tg}\left(\frac{t}{4}+\frac{\pi}{8}\right)\sin t\,\mathrm{d}t$, који се сменом $\frac{t}{4}+\frac{\pi}{8}=u$, $\mathrm{d}t=4\,\mathrm{d}u$, $u=\frac{\pi}{8}$ за $t=0$ и $u=\frac{3\pi}{8}$ за $t=\pi$, своди на $-4\int_{\pi/8}^{3\pi/8}\mathrm{tg}\,u\sin\left(4u-\frac{\pi}{2}\right)\,\mathrm{d}u=4\int_{\pi/8}^{3\pi/8}\mathrm{tg}\,u\cos 4u\,\mathrm{d}u$. Ако сада приметимо да је $\cos 4u=2\cos^2 2u-1=2(2\cos^2 u-1)^2-1=8\cos^4 u-8\cos^2 u+1$, добијамо
$$I=4\int_{\pi/8}^{3\pi/8}\frac{8\cos^4 u-8\cos^2 u+1}{\cos u}\sin u\,\mathrm{d}u.$$
Коначно, ако је $\cos u=y$, $-\sin u\,\mathrm{d}u=\mathrm{d}y$, $y=\sqrt{(2+\sqrt{2})/2}$ за $u=\frac{\pi}{8}$ и $y=\sqrt{(2-\sqrt{2})/2}$ за $u=\frac{3\pi}{8}$, тада је
$$\begin{aligned}I&=4\int_{\sqrt{(2-\sqrt{2})/2}}^{\sqrt{(2+\sqrt{2})/2}}\frac{8y^4-8y^2+1}{y}\,\mathrm{d}y=4(2y^4-4y^2+\ln y)\Big|_{\sqrt{(2-\sqrt{2})/2}}^{\sqrt{(2+\sqrt{2})/2}}\\&=4\left(2\left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)^2-4\left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)-2\left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)^2+4\left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)+\frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)\\&=4\left(2\left(\frac{3+2\sqrt{2}}{8}\right)-2-\sqrt{2}-2\left(\frac{3-2\sqrt{2}}{8}\right)+2-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{(2+\sqrt{2})^2}{2}\right)\\&=-4\sqrt{2}+4\ln(1+\sqrt{2})\approx-2,1314.\end{aligned}$$

3. На полазни интеграл I примењујемо парцијалну интеграцију:

$$I = \left[\begin{array}{ll} u = \ln x \ln(x-1) & \mathrm{d}v = (2x{-}1)\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \left(\dfrac{\ln(x-1)}{x} + \dfrac{\ln x}{x-1}\right)\mathrm{d}x & v = x^2 - x \end{array}\right]$$

$$= (x^2-x)\ln x \ln(x-1) - \int \frac{(x^2-x)\ln(x-1)}{x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{(x^2-x)\ln x}{x-1}\,\mathrm{d}x$$

$$= (x^2-x)\ln x \ln(x-1) - \int (x-1)\ln(x-1)\,\mathrm{d}x - \int x\ln x\,\mathrm{d}x.$$

Даље је $\int x\ln x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{ll} u = \ln x & \mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x/x & v = x^2/2 \end{array}\right] = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2.$

Дакле, $I = (x^2-x)\ln x\ln(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2\ln(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2 - \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{4}x^2 + c.$

4. Тражена запремина је

$$V = \pi\int_0^\pi x\sin^2 x\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^\pi x\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi x\,\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}\int_0^\pi x\cos 2x\,\mathrm{d}x.$$

$$= \left[\begin{array}{ll} u = x & \mathrm{d}v = \cos 2x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x & v = \sin 2x/2 \end{array}\right] = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^\pi - \frac{\pi}{2}\left[\frac{x\sin 2x}{2}\Big|_0^\pi - \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin 2x\,\mathrm{d}x\right] = \frac{\pi^3}{4} \approx 7,7516.$$