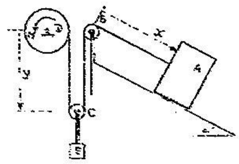
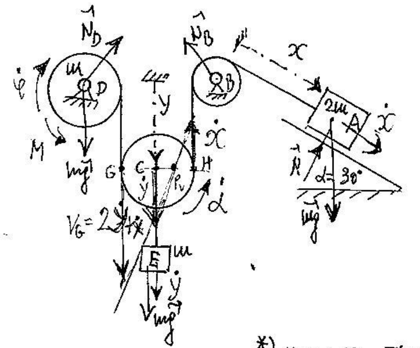
PRIMENA TEOREME $T-T_0=A^s+A^u$ KADA SISTEM IMA VIŠE STEPENI SLOBODE KRETANJA



Teret E mase m vezan je za centar pokretnog diska C poluprečnika r (disk C je zanemarljive mase). Uže je namotano na disk D poluprečnika R i mase m, zatim obuhvata disk C, disk B (zanemarljivog: poluprečnika i mase) i ide paralelno strmoj ravni (nagiba $\alpha=30^\circ$) i povlači teret A, mase 2m (veza je idealna). Za date koodrinate x, y odrediti: 1) kinetičku energiju sistema, 2) rad sila sistema, 3) ubrzanje tereta E i tereta A.

Na disk D dejstvuje moment sprega sila $M=\frac{mgR}{2}$. $x(0)=y(0)=0$, $\dot x(0)=\dot y(0)=0$.



SISTEM IMA DVA STEPENA SLOBODE KRETANJA, NEKA SU KOORDINATE x, y; GENERALISANE BRZINE SU IM $\dot x, \dot y$ ONE SU MEĐUSOBNO NEZAVISNE! KINEMATSKE VEZE: $V_E=\dot y$

$\vec V_H=\vec V_C+\vec V_H^C \Rightarrow \dot\alpha=\frac{\dot x+\dot y}{R}$ $\quad \vec V_G=\vec V_C+\vec V_G^C \Rightarrow V_G=2\dot y+\dot x$

(SLIČNO SE MOŽE DOBITI I POMOĆU POLA BRZINA, PROVERITI).

$\dot\varphi=\frac{2\dot y+\dot x}{R}$.

KINETIČKA ENER. SIS: $T=T_A+T_E+T_{Dis(D)}$

*) KRETANJE TERETA A $\boxed{\text{TRANSLACIJA}}$ $\Rightarrow T_A=\frac12 m_A V_A^2=\frac12(2m)\dot x^2=m\dot x^2$

*) TERET E SE KREĆE $\boxed{\text{TRANSLATORNO}}$ $\Rightarrow T_E=\frac12 m_E V_E^2=\frac12 m\dot y^2$

*) DISK D $\boxed{\text{ROTIRA OKO NEPOMIČNE OSE}}$ $\Rightarrow T_D=\frac12 J_{Dz}\dot\varphi^2=\frac12\left(\frac12 mR^2\right)\left[\frac{2\dot y+\dot x}{R}\right]^2$

UKUPNA KIN. ENER. SIS: $T=\frac54 m\dot x^2+\frac32 m\dot y^2+m\dot x\dot y$

RAD SILA NA PROIZVOLJNOM POMERANJU "x", "y" JE:
(SISTEM JE "NEIZMENJIV" PA JE RAD UNUTRAŠNJIH SILA NULA)

$A(m_A\vec g)=2mg\sin\alpha(x)$ $\quad A(m_E\vec g)=mg(y)$ $\quad A(M)=-\int M\,d\varphi=-\frac{mgR}{2}\left(\frac{2y+x}{R}\right)$

$A(\vec N)=0$, $A(m_D\vec g)=0$, $A(\vec N_D)=0$ UKUPNI RAD $A=\sum_j A_j=\frac{mg}{2}x$

TEOREMA O PROMENI KIN. ENER. U INTEGRALNOM OBLIKU: $T-\cancel{T_0}^{\,0}=A^s+\cancel{A^u}_{\,0}$

$$\frac54 m\dot x^2+\frac32 m\dot y^2+m\dot x\dot y=\frac{mg}{2}x \;\Big/\frac{d}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac52 m\dot x\ddot x+3m\dot y\ddot y+m\ddot x\dot y+m\dot x\ddot y=\frac{mg}{2}\dot x} \quad (**)$$

GRUPIŠIMO FORMU POMOĆU GENERALISANIH BRZINA "$\dot x$" "$\dot y$" $\Rightarrow$

$$(**)\;\boxed{\left(\frac52 m\ddot x+m\ddot y-\frac{mg}{2}\right)\dot x+\left(3m\ddot y+m\ddot x\right)\dot y=0}$$ (POŠTO SU BRZINE MEĐUSOBNO NEZAVISNE) $\Rightarrow$

$$(*)\left\{\begin{array}{l}\frac52 m\ddot x+m\ddot y-\frac{mg}{2}=0\\ 3m\ddot y+m\ddot x=0\end{array}\right. \Rightarrow \ddot x=\frac{3}{13}g \quad \ddot y=-\frac{g}{13}$$

$\boxed{\text{NAPOMENA}}$: KADA SISTEM IMA VIŠE STEPENI SLOBODE, NAJBOLJE JE UVESTI GENERALISANE KOODRINATE I NJIHOVE GENERALISANE BRZINE, JER SE ONDA IZ TEOREME O PROMENI KIN. ENER. U DIFERENCIJALNOM OBLIKU T.J. DIFERENCIJALNIH FORMI NALIK (**) UVEK MOGU DOBITI DIFERENCIJALNE JEDNAČINE KRETANJA OBLIKA (*). KASNIJE ĆEMO JEDNAČINE OBLIKA (*) DOBIJATI NA "OPTIMALNI" NAČIN IZ LAGRANŽEVIH DIF. JEDNAČINA DRUGE VRSTE.

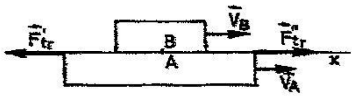
13.2.5. Rad unutrašnjih sila trenja, pri dejstvu na sistem krutih tela

Neka se kruta tela A i B kreću apsolutnim brzinama $\vec{V}_A$ i $\vec{V}_B$ i neka za to vreme izmedju njih u dodirnim tačkama dejstvuju sile trenja klizanja $\vec{F}'_{tr}$ i $\vec{F}''_{tr}$ (sl.75), koje su medjusobno suprotne sile

$$\vec{F}'_{tr\,\mu} = -\vec{F}''_{tr\,\mu}.$$

(OVU SMO SILU NA PREDAVANJIMA/VEŽBAMA OBELEŽAVALI SA $\vec{F}_\mu$)!! (SA $\vec{F}_{tr}$ SMO OBELEŽAVALI SILU TRENJA KOTRLJANJA).

Izračunajmo snagu ovih sila. Prema definiciji snage imamo



Sl. 75

$$P^u = \vec{F}'_{tr}\cdot\vec{V}_A + \vec{F}''_{tr}\cdot\vec{V}_B,$$

pri čemu pretpostavljamo da je $V_A > V_B$. Kako je tada relativna brzina dodirujućih tačaka

$$\vec{V}_{rel} = \vec{V}_A - \vec{V}_B$$

usmerena udesno, to je

$$P^u = \vec{F}'_{tr}\cdot\vec{V}_A - \vec{F}'_{tr}\cdot\vec{V}_B = \vec{F}'_{tr}\cdot(\vec{V}_A - \vec{V}_B) = \vec{F}'_{tr}\cdot\vec{V}_{rel} = -F'_{tr}\cdot V_{rel}$$

i zaključujemo da je snaga unutrašnjih sila trenja klizanja tarućih tela sistema jednaka negativnom proizvodu sile trenja i relativne brzine pomeranja dodirujućih tačaka tela.

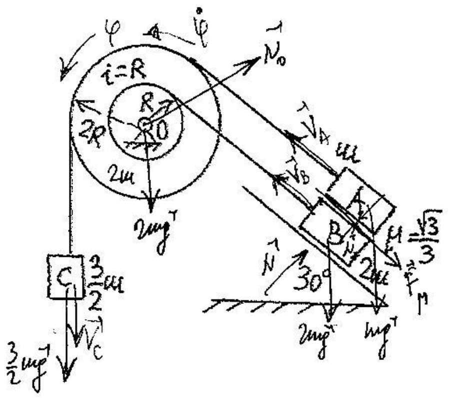
Kako je

$$V_{rel} = \frac{dx_{rel}}{dt},$$

gde je dx_{rel} elementarno relativno pomeranje dodirujućih tačaka tela, to je elementaran rad unutrašnjih sila trenja

$$d'A^u_{tr} = P^u dt = -F_{tr}dx_{rel}.$$

Primer:



Sistem koji je u vertikalnoj ravni čine: koaksijalni disk 0 (poluprečnika R, 2R, mase 2m i kraka inercije i=R) i tegovi: A mase m, B mase 2m, C mase ($^3/_2$)m. Strma ravan je nagiba α=30°. U tački 0 je cilindrični zglob. Strma ravan je glatka a površ između tereta A i B je hrapava sa koeficijentom trenja μ=√3/3. Užad su bez mase. Odrediti: 1) kinetičku energiju sistema, 2) ugaono ubrzanje koaksijalnog diska, 3) silu u užetu iznad tega C.

$q_1 \equiv \varphi \quad V_C = 2R\dot{\varphi},\ V_A = 2R\dot{\varphi},\ V_B = R\dot{\varphi},\ \dot{x}_{rel} = 2R\dot{\varphi} - R\dot{\varphi}$

$$T = T_C + T_{K\cdot DIS} + T_B + T_A \qquad \left[\begin{array}{l} T_C = \frac{1}{2}m_C V_C^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}m\right)(2R\dot{\varphi})^2 = 3mR^2\dot{\varphi}^2 \\ T_{K\cdot DIS} = \frac{1}{2}J_{oz}\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}(2mR^2)\dot{\varphi}^2 = mR^2\dot{\varphi}^2 \\ T_B = \frac{1}{2}m_B V_B^2 = \frac{1}{2}(2m)(R\dot{\varphi})^2 = mR^2\dot{\varphi}^2 \\ T_A = \frac{1}{2}m_A V_A^2 = \frac{1}{2}(m)(2R\dot{\varphi})^2 = 2mR^2\dot{\varphi}^2 \end{array}\right]$$

$$\boxed{T = 7mR^2\dot{\varphi}^2}$$

RAD SILA NA POMERANJU "φ": $A^s = \sum A_i \;;\; A^u = A(\vec{F}_\mu)$

$A(m_C\vec{g}) = \frac{3}{2}mg(2R\varphi) = 3mgR\varphi \qquad A(m_B\vec{g}) = -2mg(R\varphi)\left(\frac{1}{2}\right) \qquad A(m_A\vec{g}) = -mg(2R\varphi)\left(\frac{1}{2}\right) \qquad A(\vec{F}_\mu) = -\int \underbrace{\mu}_{\frac{\sqrt{3}}{3}} \underbrace{N_2}_{\frac{\sqrt{3}mg}{2}}(R\,d\varphi) = -\frac{mg}{2}R\varphi$

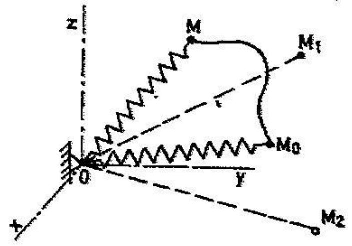
$A(\vec{N}_0) = 0,\quad A(m_{K\cdot DIS}\vec{g}) = 0,\quad A(\vec{N}) = 0$

$$\boxed{A = A^s + A^u = \frac{mg}{2}R\varphi}$$

TEOREMA: $T - \cancel{T_0}^{\,0} = A^s + A^u \qquad 7mR^2\dot{\varphi}^2 = \frac{mg}{2}R\varphi \qquad \dot{\varphi}^2 = \left(\frac{1}{14}\right)\left(\frac{g}{R}\right)\varphi \,\Big/\, \frac{d}{dt} \Rightarrow \boxed{\ddot{\varphi} = \left(\frac{1}{28}\right)\frac{g}{R}}$

NAPOMENA: NAĆI SILU U UŽETU. IAKO JE SVAKO KRUTO TELO "NEIZMENJIV" SISTEM PA JE U NJEMU RAD UNUTRAŠNJIH SILA NULA, U NEKIM SLUČAJEVIMA * U SISTEMU KRUTIH TELA * MOŽE DA POSTOJI RAD UNUTRAŠNJIH SILA.

Primer centralne sile je sila u opruzi, koja je jednim krajem vezana za nepokretnu tačku 0 (sl. 19). Neka je opruga krutosti c a njena nedeformisana dužina r_o, kada je drugi kraj opruge u položajima M_o ($\overline{0M}_o = r_o$). Položaj M_o uzimamo za tačku nultog potencijala. U položaju M, odredjenom vektorom $\vec{r} = \overline{0M}$ u opruzi je izazvana sila $F_e = -c\,(r - r_o)$ i ima smer ka tački 0. Zato je



Sl. 19

$$E_p(M) = A_{MM_o} = \int_r^{r_o} F_e\,dr = -c\int_r^{r_o}(r - r_o)\,dr =$$

$$= \frac{c\,(r - r_0)^2}{2} = \frac{c\,(\Delta\ell)^2}{2},$$

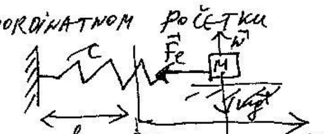
gde je $\Delta\ell = r - r_o$.

Pri prelazu tačke iz položaja M_1 u položaj M_2 rad restitucione sile opruge je jednak razlici potencijala prvog i drugog položaja

$$A_{M_1M_2} = \frac{c\,(\Delta\ell_1)^2}{2} - \frac{c\,(\Delta\ell_2)^2}{2}$$

gde su $\Delta\ell_1$ i $\Delta\ell_2$ odgovarajuća izduženja u početnoj i krajnjoj tački putanje.

$\boxed{\text{NAPOMENA}}$: U SLUČAJU DA JE INERCIJALAN SISTEM "$0x$" TAKO POSTAVLJEN DA MU JE U KOORDINATNOM POČETKU OPRUGA NENAPREGNUTA PROMENA DUŽINE U OPRUZI "$\Delta\ell$" IMA NAJJEDNOSTAVNIJI OBLIK.



DA SE PODSETIMO: NAJPOZNATIJA REALIZACIJA "HARMONISKOG JEDNODIMENZIONOG OSCILATORA" JESTE ELASTIČNA OPRUGA (NA SLICI). POREKLO ELASTIČNE SILE JE U "ELEKTRIČNIM" SILAMA KOJE DEJSTVUJU IZMEDJU MOLEKULA (I ATOMA) UNUTAR STRUKTURE SAME OPRUGE. MAKROSKOPSKI IZRAZ ZA ELASTIČNU SILU U OPRUZI DAT JE HUKOVIM ZAKONOM $|\vec{F}_e| = c\Delta\ell$ c (KOEFICIJENT KRUTOSTI OPRUGE)*), $\Delta\ell$ (PROMENA DUŽINE) AKO SE TAČKA (MASENA) POMERI (LEVO, DESNO) IZ RAVNOTEŽNOG POLOŽAJA (TU SMO STAVILI KOORDINATNI POČETAK) OPRUGA SE "SABIJE"/"IZDUŽI" ZA IZNOS "x"; "x" JE MALO U ODNOSU NA DUŽINU CELE OPRUGE. INTENZITET SILE RASTE LINEARNO U ODNOSU NA UDALJENJE OD RAVNOTEŽNOG POLOŽAJA. SMER SILE JE PREMA POLOŽAJU RAVNOTEŽE. AKO PRIMENIMO DRUGI AKSIOM DINAMIKE (TO SMO RANIJE POKAZALI) ZA DATI OSCILATOR SLEDI:

$$m\ddot{\vec{r}}_M = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_e \;\Big/ \cdot\vec{i} \Rightarrow \quad m\ddot{x} = -cx \quad \text{T.J.} \quad m\ddot{x} + cx = 0^{**)}$$

* * *

SADA PREKO TEOREME O PROMENI KIN. ENER. $T - T_0 = A$ $\quad T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2;\quad A = -c\int_0^x x\,dx = -\frac{c}{2}x^2;$

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - T_0 = -\frac{c}{2}x^2 \;\Big/ \frac{d}{dt} \overset{\text{ILI U DIF. OBLIKU}}{\Rightarrow} \quad \frac{1}{2}m2\dot{x}\ddot{x} = -\frac{c}{2}2\dot{x}x \quad m\ddot{x} = -cx \quad \text{T.J.} \quad m\ddot{x} + cx = 0^{**)}$$

$\boxed{\text{NAPOMENA}}$: KAO ŠTO SMO POKAZALI U VEKTORSKOJ DINAMICI ZA VEKTORE "$\vec{K}$" I "$\vec{L}_0$" T.J. ZA ODGOVARAJUĆE TEOREME $\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F}_R^S$; $\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_0^S$ DA POSTOJE I SLUČAJEVI "ODRŽANJA" $\vec{K}$ I $\vec{L}_0$ AKO BI $\vec{F}_R^S = 0$; $\vec{M}_0^S = 0$ SLIČNO ZA NEKU OSU "$0x$" $\sum_i X_i^S = 0 \Rightarrow \frac{dK_x}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{K_x(t) = K_x(t_0) = \text{const}}$; $\sum_i M_{0z(i)}^S = 0$ $\frac{dL_{0z}}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{L_{0z}(t) = \text{const}}$

ISTO TAKO POSTOJI I "ODRŽANJE" ENERGIJE, NA PRIMER, U SLUČAJU NAŠEG OSCILATORA (SA SLIKE)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}cx^2 + C\right) = m\dot{x}\ddot{x} + cx\dot{x} = \underbrace{(m\ddot{x} + cx)}_{(**)\,"0"}\dot{x} = ("0")\underbrace{\dot{x}}_{\forall\dot{x}} = 0 \Rightarrow \frac{d(T - A)}{dt} = 0 \Rightarrow$$

(*) SISTEM ZA KOJI VAŽI "ODRŽANJE" ENERGIJE T.J. "INTEGRAL ENERGIJE" ZVAĆEMO KONZERVATIVNI: $\boxed{T - A = \text{const}}$

OPŠTIJE: KAKVE SILE TREBA DA BUDU (TJ. NJIHOVO POLJE) DA BI SE ODRŽAVALA ENERGIJA?

TREBA $\operatorname{rot}(\vec{F}) = 0$ $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0$ SILE KOJE IMAJU $\operatorname{rot}(\vec{F}) = 0$ ZVAĆEMO "KONZERVATIVNE" SILE. SVAKO NEKA SAM PROVERI DA SU SILA "ZEMLJINE TEŽE" KAO I "ELASTIČNA SILA" KONZERVATIVNE SILE (POMOĆU $\nabla\times\vec{F} = 0$).

*) $c\left[\frac{N}{m}\right]$ ILI $\left[\frac{kg}{s^2}\right]$ KRUTOST OPRUGE c BROJNO JE JEDNAKA SILI KOJA OPRUGU IZDUŽI ZA JEDINIČNU DUŽINU.

**) OPŠTI INTEGRAL $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$ $\quad \omega^2 = \frac{c}{m}$; PARTIKULARNI OBLIK (ZA DOPUNSKE USLOVE x ?) $x = x_0\cos\omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin\omega t$.