Математика 2

Душан Ђукић

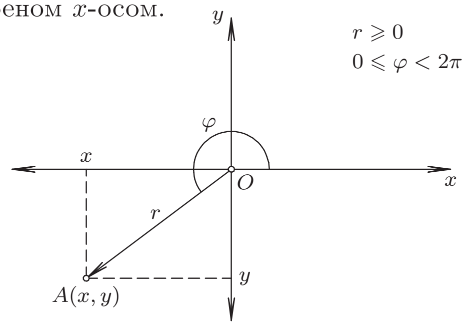
4-5. Равне фигуре и обртна тела

1. Поларне координате

Крива у равни, или фигура одређена њоме, може бити задата на разне начине. У овој глави се бавимо случајевима када је крива задата експлицитно или параметарски, у Декартовим (правоуглим) или поларним координатама.

За почетак ћемо се подсетити *поларних координата*. Посматрајмо тачку A у координатној равни. Позиција тачке A је одређена растојањем $OA = r$ од координатног почетка O и углом φ који вектор $\overrightarrow{OA}$ гради са позитивно усмереном x-осом.

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$



$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos\varphi = x/r \\ \sin\varphi = y/r \end{cases}$$

Декартове координате тачке једнозначно одређују њене поларне координате и обрнуто.

Нешто општије, центар поларних координата може да буде и нека тачка $R_0(x_0, y_0)$ различита од координатног почетка. У том случају је

$$x = x_0 + r\cos\varphi, \quad y = y_0 + r\sin\varphi.$$

2. Површина фигуре у равни

(1°) *Експлицитно задата крива*

Видели смо да одређени интеграл функције представља површину испод графика. Прецизније, за произвољну непрекидну функцију f, површина између криве $y = f(x)$ и x-осе на интервалу $[a, b]$ једнака је

$$P = \int_a^b |y|\,dx.$$

Слично, ако је фигура у равни одређена кривим $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ за $a \leqslant x \leqslant b$, њена површина је

$$P = \int_a^b |y_1 - y_2|\,dx.$$

(2°) *Крива у параметарском облику*

Посматрајмо нешто општију ситуацију када је фигура одређена кривом γ задатом параметарски:

$$\gamma: \quad x = x(t), \ \ y = y(t) \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta). \tag{1}$$

Претпоставимо на кратко да је функција $x(t)$ растућа, а $y(t)$ ненегативна на интервалу $[\alpha, \beta]$. Површина између криве γ и x-осе је једнака

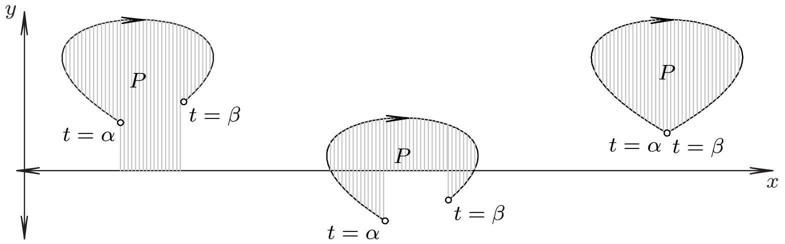
$$P = \int_{x(\alpha)}^{x(\beta)} y\,dx = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt. \tag{2}$$

Сличне резултате добијамо у другим случајевима. Дакле:

(а) Ако је $x(t)$ растућа и $y(t) \geqslant 0$, или је $x(t)$ опадајућа и $y(t) \leqslant 0$, онда је $P = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt$;

(б) Ако је $x(t)$ опадајућа и $y(t) \geqslant 0$, или је $x(t)$ растућа и $y(t) \leqslant 0$, онда је $P = -\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt$.

Одавде се лако можемо уверити коју површину мери интеграл (2) ако је γ из (1) произвољна глатка крива без самопресека. Посебно нам је користан случај када је крива γ затворена, тј. $x(\alpha) = x(\beta)$ и $y(\alpha) = y(\beta)$.



Приметимо да се променом оријентације мења знак интеграла у (1). Пошто површина мора бити позитивна, за резултат се узима апсолутна вредност.

Пример 1. Наћи површину области између криве $y = x^3 - x^2$ и праве $y = 4(x-1)$.

Решење. Пре него што применимо формулу, треба да знамо две ствари:

(1°) Интервал $[a, b]$, тј. пројекцију дате области на x-осу. За њега нам је нужно да одредимо пресечне тачке дате криве и праве.

(2°) Знак израза $y_1 - y_2$. У зависности од њега, $|y_1 - y_2|$ може бити једнако $y_1 - y_2$ или $y_2 - y_1$. Знак се може променити само у некој од пресечних тачака.

Пресечне тачке задовољавају $y = x^3 - x^2 = 4(x-1)$, тј. $0 = x^3 - x^2 - 4(x-1) = (x-1)(x-2)(x+2)$, па је $x \in \{-2, 1, 2\}$. Дакле, област између кривих лежи између $x = -2$ и $x = 2$, те је тражена површина

$$P = \int_{-2}^{2} |y_1 - y_2| dx, \quad \text{где су} \quad y_1 = x^3 - x^2 \ \text{ и } \ y_2 = 4(x-1).$$

Како је $y_1 - y_2 = (x-1)(x-2)(x+2)$ позитивно за $-2 < x < 1$ и негативно за $1 < x < 2$, следи да је

$$P = \int_{-2}^{1} (y_1 - y_2)dx + \int_{1}^{2} (y_2 - y_1)dx = \int_{-2}^{1} (x^3 - x^2 - 4x + 4)dx - \int_{1}^{2} (x^3 - x^2 - 4x + 4)dx = \frac{45}{4} + \frac{7}{12} = \frac{71}{6}.$$

Пример 2. Наћи површину испод *циклоиде* дате једначинама $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ за $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

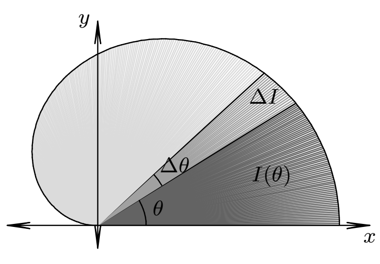
Решење. Тражена површина је

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{2\pi} y(t)x'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \cdot (1 - \cos t)\, dt = \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \cos^2 t\right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt = \left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi} = 3\pi \approx 9{,}42478. \end{aligned}$$

(3°) *Фигура у поларним координатама*

Нека је сада фигура описана условом $r \leqslant r(\varphi)$ за $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$ у поларним координатама.

Означимо са $I(\theta)$ површину фигуре одређене кривом γ у области у којој је $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \theta$. Ако је $\Delta\theta$ веома мало, $\Delta I = I(\theta + \Delta\theta) - I(\theta)$ је блиско кружном исечку с полупречником $r(\theta)$ и централним углом $\Delta\theta$, те је његова површина $\frac{1}{2}r(\theta)r(\theta + \Delta\theta) + o(\Delta\theta)$.



У лимесу имамо $I'(\theta) = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta\theta} = \frac{1}{2}r^2$, па је $I(\theta) = \int_\alpha^\theta \frac{1}{2} r(\varphi)^2 d\varphi$. Следи да је површина дате фигуре

$$P = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2 d\varphi.$$

Истакнимо добијене резултате:

Тврђење 1.

(1°) Површина фигуре између кривих $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ за $a \leqslant x \leqslant b$ је $P = \int_a^b |y_1 - y_2| dx$;

(2°) површина фигуре омеђене кривом $\gamma : \{x = x(t), y = y(t)\}$ за $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ и x-осом је $P = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)\, dt$;

(3°) површина фигуре дате у поларним координатама условима $r \leqslant r(\theta)$ за $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$ једнака је $P = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2 d\theta$.

3. Дужина лука криве

(1–2°) *Крива задата експлицитно или параметарски*

Претпоставимо да је крива задата параметарски у равни, условима (1), и означимо са $\ell(\tau)$ дужину лука криве за $\alpha \leqslant t \leqslant \tau$.

При кретању параметра t од τ до $\tau + \Delta\tau$, координате x и y тачке на кривој промене се редом за $\Delta x \approx x'(\tau)\Delta\tau$ и $\Delta y \approx y'(\tau)\Delta\tau$. При томе је тачка на кривој прешла приближно праволинијски пут чија је дужина (по Питагориној теореми) $\Delta\ell = \ell(\tau + \Delta\tau) - \ell(\tau) = \sqrt{x'(\tau)^2 + y'(\tau)^2} \cdot \Delta\tau + o(\tau)$.

Пуштањем $\Delta\tau \to 0$ добићемо $\ell'(\tau) = \lim\limits_{\Delta\tau\to 0} \dfrac{\Delta\ell}{\Delta\tau} = \sqrt{x'(\tau)^2 + y'(\tau)^2}$. Следи да је дужина лука криве (1) једнака

$$\ell = \ell(\beta) = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt.$$

У случају тродимензионалне криве γ у простору задате условима $x = x(t)$, $y = y(t)$ и $z = z(t)$ за $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, добија се формула за дужину криве $\ell = \displaystyle\int_\alpha^\beta \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt$.

Одавде одмах добијамо одговарајућу формулу и ако је крива дата експлицитно, условом $y = y(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. Наиме, тада улогу параметра t преузима x и важи $x'(t) = 1$ и $y'(t) = y'(x)$, те претходна формула постаје

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx.$$

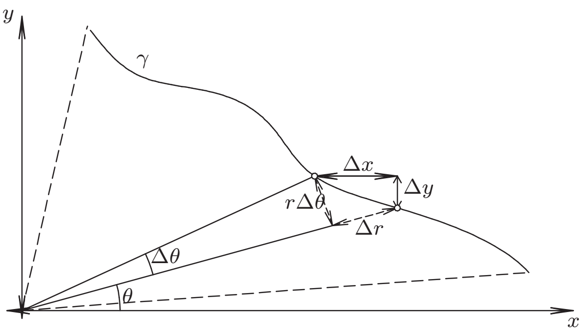
Пример 3. Одредити дужину криве дате једначином $y = \operatorname{ch} x$ за $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Решење. Како је $y' = \operatorname{sh} x$, тражена дужина је

$$\ell = \int_0^1 \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}\, dx = \int_0^1 \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x\big|_0^1 = \operatorname{sh} 1 = \frac{e^2 - 1}{2e} \approx 1{,}1752.$$

(3°) *Крива у поларним координатама*

Нека је крива γ задата у поларним координатама условом $r = r(\varphi)$ за $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$.



Означимо са $\ell(\theta)$ дужину дела криве γ у области у којој је $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \theta$. Ако је $\Delta\theta$ веома мало и параметар t се креће од θ до $\theta + \Delta\theta$, тачка на кривој прелази пут који се може апроксимирати хипотенузом правоуглог троугла са катетама $r\Delta\theta$ и $\Delta r \approx r(\theta + \Delta\theta) - r(\theta) \approx r'\Delta\theta$. Следи да је $\Delta\ell = \ell(\theta + \Delta\theta) - \ell(\theta) = \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2}\, \Delta\theta + o(\Delta\theta)$.

Пуштањем $\Delta\theta \to 0$ добијамо $\ell'(\theta) = \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2}$, па је

$$\ell = \ell(\beta) = \int_\alpha^\beta \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\, d\varphi.$$

Пример 4. Наћи дужину *кардиоиде*, дате у поларним координатама условом $r = 1 - \cos\theta$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$.

Решење. Имамо $r' = \sin\theta$, па је тражена дужина

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos\theta}\, d\theta = \int_0^{2\pi} 2\sin\frac{\theta}{2}\, d\theta = \left(-4\cos\frac{\theta}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = 8.$$

Истакнимо добијене резултате:

Тврђење 2.

(1°) Дужина криве дате условом $y = y(x)$ за $a \leqslant x \leqslant b$ је $\ell = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx$;

(2°) дужина криве $\gamma : \{x = x(t), y = y(t), z = z(t)\}$ за $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ је $\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt$;

(3°) дужина криве $r = r(\theta)$ за $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$ у поларним координатама је $\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta$.

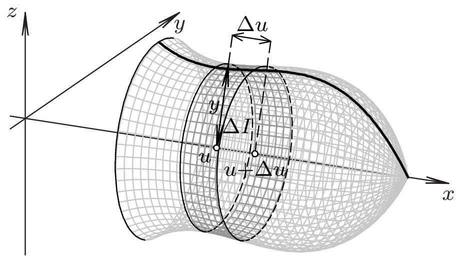
4. Запремина обртног тела

Обртно тело је тело у простору које се добија ротацијом криве γ око неке праве - *осе ротације*. Овде за осу ротације узимамо x-осу. Ротирање криве γ око x-осе чини обртно тело Φ.

(1°) *Експлицитно задата крива*

Прво разматрамо случај када је крива γ задата експлитицно, једначином $y = y(x)$ за $a \leqslant x \leqslant b$.

Означимо са $I(t)$ површину дела тела Φ између равни $x = a$ и $x = u$. Ако је Δu веома мало, део обртног тела између равни $x = u$ и $x = u + \Delta u$ је близак ваљку полупречника основе y и висине Δu. Зато је запремина овог дела тела $\Delta I = I(u + \Delta u) - I(u) = \pi y^2 \Delta u + o(\Delta u)$.



Пуштањем $\Delta u \to 0$ добијамо $I'(u) = \lim\limits_{\Delta u \to 0} \dfrac{\Delta I}{\Delta u} = \pi y^2$. Према томе, запремина целог обртног тела је

$$V = I(b) = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

(2°) *Крива у параметарском облику*

Нека је сада крива γ дата условима (1). Ако је $x(t)$ растућа функција за $t \in [\alpha, \beta]$, имамо $dx = x'(t)dt$, па је запремина

$$V = \pi \int_\alpha^\beta y(t)^2 x'(t) dt. \tag{3}$$

Општији случај, када $x(t)$ није монотона функција на интервалу $[\alpha, \beta]$, разматра се исто као и у случају површине одређене кривом у претходном одељку, тако да и тада формула (4) остаје на снази до на знак (тј. за резултат се узима апсолутна вредност интеграла).

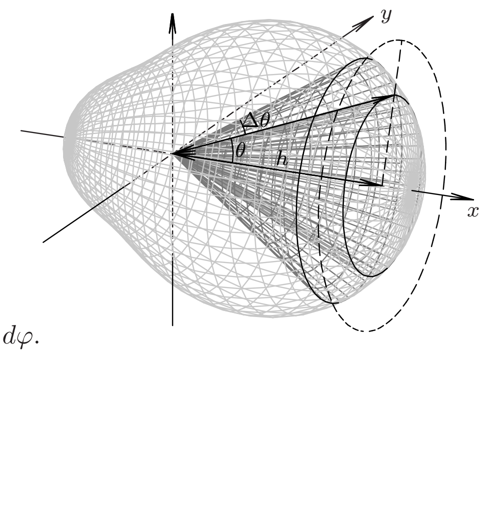
Пример 5. Нека су a и b ($|a| < b$) константе. Ротирањем круга $x = a\cos t$, $y = b + a\sin t$ за $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ око x-осе добија се *торус*. Његова запремина је

$$V = \left|\pi \int_0^{2\pi} y^2 \cdot x' dt\right| = \pi \int_0^{2\pi} (b + a\sin t)^2 \cdot a \sin t\, dt = \pi a \int_0^{2\pi} (\cancel{b^2 \sin t} + 2ab \sin^2 t + \cancel{a^2 \sin^3 t}) dt = 2\pi^2 a^2 b.$$

(3°) *Крива у поларним координатама*

Размотрићемо и случај поларних координата. У овом случају област $r \leqslant r(\theta)$ ротира око x-осе.

Означимо са $I(\theta)$ запремину дела тела Φ у области у којој је $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \theta$. Ако је $\Delta\theta$ веома мало, $\Delta I = I(\theta + \Delta\theta) - I(\theta)$ је блиско разлици две купе заједничке висине $h = r\cos\theta$, полупречника основе $h\mathrm{tg}\theta$ и $h\mathrm{tg}(\theta + \Delta\theta)$. Зато је запремина овог дела обртног тела $\Delta I \approx \frac{1}{3}\pi h^2 (\mathrm{tg}^2(\theta + \Delta\theta) - \mathrm{tg}^2\varphi) \cdot h\, d\varphi = \frac{1}{3}\pi (r\cos\theta)^3 (\mathrm{tg}^2\theta)' \Delta\theta + o(\Delta\theta) = \frac{2}{3}\pi r^3 \sin\theta + o(\Delta\theta)$ када $\Delta\theta \to 0$.



У лимесу имамо $I'(\theta) = \lim\limits_{\Delta\theta \to 0} \dfrac{\Delta I}{\Delta\theta} = \dfrac{2}{3}\pi r^3 \sin\theta$. Следи да је запремина читавог тела Φ

$$V = I(\beta) = \frac{2}{3}\pi \int_\alpha^\beta r^3 \sin\varphi\, d\varphi.$$

Истакнимо добијене резултате:

Тврђење 3. Нека је V запремина обртне површи добијене ротирањем криве γ око x-осе.

(1°) Ако је γ дата условом $y = y(x)$ за $a \leqslant x \leqslant b$, онда је $V = \pi \int_a^b y^2\,dx$;

(2°) Ако је γ дата условима $x = x(t)$, $y = y(t)$ за $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, онда је $V = \int_\alpha^\beta y(t)^2 x'(t)\,dt$;

(3°) Ако је $r \leqslant r(\varphi)$ за $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$ у поларним координатама, онда је $V = \frac{2}{3}\pi \int_\alpha^\beta r^3 \sin\varphi\,d\varphi$.

Пример 6. *Бернулијева лемнискаша* (заправо, њена четвртина) је дата у поларним координатама условом $r^2 = \cos\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$. Наћи запремину тела добијеног ротирањем ове криве око x-осе.

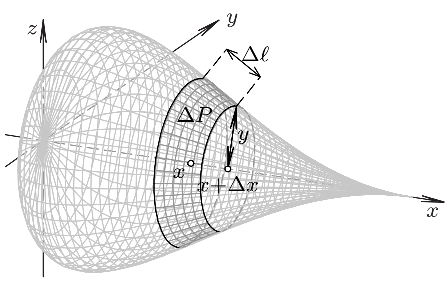
Решење. Тражена запремина је

$$V = \frac{2}{3}\pi \int_0^{\pi/4} r^3 \sin\theta d\theta = \frac{2}{3}\pi \int_0^{\pi/4} \cos^{3/2}\theta \sin\theta d\theta \ \dashv\!\begin{smallmatrix} t=\cos\theta \\ dt=-\sin\theta d\theta \end{smallmatrix}\!\vDash \frac{2}{3}\pi \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} t^{3/2} dt = \frac{4}{15}\pi\left(1-\frac{1}{2^{5/4}}\right) \approx 0{,}48552.$$

5. Површина обртне површи

(1–2°) *Крива задаша експлицишно или йарамешарски*

Претпоставимо да је крива задата параметарски, условима (1).



Означимо са $P(t)$ површину обртне површи за $\alpha \leqslant \tau \leqslant t$. Као што смо видели у одељку о дужини криве, ако је δt веома мало, део ове криве за $t \leqslant \tau \leqslant t + \Delta t$ има дужину $\Delta\ell \approx \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\Delta t$. Ротирањем око x-осе овај део криве чини уску површ блиску зарубљеној купи чија је изводница $\Delta\ell$, а полупречници обеју основа $\approx y(t)$. Површина овог дела површи је $\Delta P = 2\pi y(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\Delta t + o(\Delta t)$ када $\Delta t \to 0$.

Добијамо $P'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta P}{\Delta t} = 2\pi y(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$, па интеграција даје формулу

$$P = P(\beta) = 2\pi \int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt.$$

Одавде одмах добијамо одговарајућу формулу и ако је крива дата експлицитно, условом $y = y(x)$ за $a \leqslant x \leqslant b$. Улогу параметра t преузима x, те претходна формула постаје

$$P = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y'(x)^2}\,dx.$$

Пример 7. *Асшроида* је крива дата једначином $|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = 1$. Наћи површину тела добијеног ротирањем ове криве око x-осе.

Решење. Крива је симетрична у односу на обе осе, па можемо да посматрамно само део у првом квадранту и резултат помножимо са 2. Сменом $x^{2/3} = \cos^2 t$ и $y^{2/3} = \sin^2 t$ добијамо параметризацију $x = \cos^3 t$ и $y = \sin^3 t$ за $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$. Пошто је $x' = -3\cos^2 t \sin t$ и $y' = 3\sin^2 t \cos t$, имамо $x'^2 + y'^2 = (3\sin t \cos t)^2$ и

$$P = 2\pi \int_0^{\pi/2} y\sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin^3 t \cdot 3\sin t \cos t\,dt \ \dashv\!\begin{smallmatrix} u=\sin t \\ du=\cos t dt \end{smallmatrix}\!\vDash 2\pi \int_0^1 3u^4\,du = \frac{6}{5}\pi \approx 3{,}76991.$$

(3°) *Крива у йоларним координашама*

Најзад, ако је крива γ задата у поларним координатама условом $r = r(\theta)$ за $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$, имаћемо $\Delta\ell \approx \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2}\,\Delta\theta$ и $\Delta P \approx 2\pi y\sqrt{r^2 + r'^2}\,\Delta\theta = 2\pi r \sin\theta\sqrt{r^2 + r'^2}\,\Delta\theta$, што нас води закључцима $P'(\theta) = 2\pi r \sin\theta\sqrt{r^2 + r'^2}$ и

$$P = P(\beta) = 2\pi \int_\alpha^\beta r(\varphi)\sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2} \cdot \sin\varphi\,d\varphi.$$

Пример 8. Израчунати површину тела добијеног ротирањем круга $x^2 + y^2 = 2y$ око x-осе.

Решење. У поларним координатама дати круг се представља условом $r^2 = 2r\sin\varphi$, тј. $r = 2\sin\varphi$, при чему је $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Тада је $r' = 2\cos\varphi$, а тражена површина је

$$P = 2\pi \int_0^\pi \sqrt{r^2+r'^2} \cdot r\sin\varphi\, d\varphi = 2\pi \int_0^\pi 2 \cdot 2\sin^2\varphi\, d\varphi = 4\pi.$$

Истакнимо и ове резултате:

Тврђење 4. Нека је P површина обртне површи добијене ротирањем криве γ око x-осе.

(1°) Ако је γ дата условом $y = y(x)$ за $a \leqslant x \leqslant b$, онда је $P = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\, dx$;

(2°) Ако је γ дата условима $x = x(t)$, $y = y(t)$ за $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, онда је $P = 2\pi \int_\alpha^\beta y\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt$;

(3°) Ако је $\gamma : r = r(\theta)$ $(\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta)$ у поларним координатама, важи $P = 2\pi \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2+r'^2} \cdot r\sin\varphi\, d\varphi$.

6. Задаци

1. Израчунати површину области ограничене кривом $y = \sqrt{1-x^2}$ и правом $y = \frac{x+1}{2}$.
2. Наћи површину области између кривих $y = 2|x|$ и $y = 6 + 3x - x^2$.
3. Одредити површину унутрашњости кардиоиде, дате условом $r = 1 - \cos\theta$ за $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.
4. Израчунати површину области омеђене кривом $\gamma : (x, y) = (\sin t - \sin 5t, \cos t - \cos 5t)$ за $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$.
5. Наћи дужину дела параболе $y = x^2$ у области $0 \leqslant x \leqslant 1$.
6. Наћи дужину лука криве $y = x^2 - \frac{1}{8}\ln x$ за $x \in [1, e]$.
7. Израчунати дужину криве дате у поларним координатама једначином $r = e^\varphi$, $-1 \leqslant \varphi < 1$.
8. Наћи дужину лука циклоиде: $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.
9. Наћи запремину тела које се добија ротирањем око x-осе криве $y = \sin x + \frac{1}{2}$ за $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.
10. Наћи запремину тела које се добија ротирањем око x-осе криве $y = x\sqrt[3]{1-x^3}$ за $0 \leqslant x \leqslant 1$.
11. Наћи запремину тела које се добија ротирањем око x-осе фигуре ограничене правим $x = 0$ и $y = 2e$ и кривом $y = (x+1)e^x$.
12. Крива $y = \left(x^2 + 2x^{-2}\right)^{-3/4}$ $(x \geqslant 0)$ ротира око x-осе. Наћи запремину добијеног тела.
13. Одредити запремину тела добијеног ротирањем криве $y = x + x^3$ $(0 \leqslant x \leqslant 2)$ око y-осе.
14. Наћи површину тела добијеног ротирањем криве $r = 1 + \cos\varphi$ за $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ око x-осе.
15. Израчунати површину сфере полупречника 1.
16. Крива $y = (x - \frac{1}{3})\sqrt{x}$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ ротира око x-осе. Наћи површину добијеног тела.
17. Израчунати површину тела које се добија ротирањем дела криве $y = \sin x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ око x-осе.
18. Израчунати површину тела које се добија ротирањем лука криве $y = 9x - x^3$, $0 \leqslant x \leqslant 3$, око x-осе.
19. Израчунати површину тела које се добија ротирањем око x-осе фигуре ограничене правим $y = 0$ и $y = 2x$ и параболом $y = (x-4)^2$.
20. Наћи површину тела насталог ротирањем криве $r = \cos^2\varphi$ за $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$ око x-осе.

7. Решења

1. Прво нађимо пресеке праве и криве: $\sqrt{1-x^2}=\frac{x+1}{2}\Rightarrow 4(1-x^2)=(x+1)^2\Rightarrow(x+1)(5x-3)=0$, па су пресеци у $x=-1$ и $x=\frac{3}{5}$. Тражена површина је
$$\int_{-1}^{\frac{3}{5}}\left(\sqrt{1-x^2}-\frac{x+1}{2}\right)dx=\left(\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+\frac{\arcsin x}{2}-\frac{(x+1)^2}{4}\right)\Big|_{-1}^{\frac{3}{5}}=\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5}+\frac{\pi}{4}-\frac{2}{5}\approx 0{,}70715.$$

2. Испитајмо где се две криве секу, тј. решимо једначину $6+3x-x^2=2|x|$. Може бити $6+3x-x^2=2x$ (чија су решења $x\in\{-2,3\}$) или $6+3x-x^2=-2x$ (решења $x\in\{-1,6\}$), при провера потврђује само решења $x=-1$ и $x=3$. Делови тражене површине за $-1\leqslant x\leqslant 0$ и $0\leqslant x\leqslant 3$ су
$$P_1=\int_{-1}^{0}(6+3x-x^2+2x)dx=\frac{19}{6}\quad\text{и}\quad P_12=\int_0^3(6+3x-x^2-2x)dx=\frac{27}{2},$$
па је укупна површина $P=P_1+P_2=\frac{50}{3}$.

3. Површина је $P=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi}r^2d\theta=\dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta=3\pi\approx 9{,}42478$.

4. Дата крива је затворена, јер је $(x,y)=(0,0)$ за $t=0$ и $t=\frac{\pi}{2}$. Површина области унутар ње је
$$P=\Big|\int_0^{\pi/2}y(t)x'(t)\,dt\Big|=\Big|\int_0^{\pi/2}(\sin t-\sin 5t)(5\sin 5t-\sin t)\,dt\Big|=\Big|\int_0^{\pi/2}(6\sin t\sin 5t-\sin^2 t-5\sin^2 5t)\,dt\Big|$$
$$=\Big|\int_0^{\pi/2}\frac{6(\cancelto{0}{\cos 4t}-\cancelto{0}{\cos 6t})-(1-\cancelto{0}{\cos 2t})-5(1-\cancelto{0}{\cos 10t})}{2}dt\Big|=\Big|\int_0^{\pi/2}-3\,dt\Big|=\frac{3\pi}{2}.$$

5. Тражена дужина је
$$\ell=\int_0^1\sqrt{1+y'^2}dx=\int_0^1\sqrt{1+4x^2}dx=\Big|{}_{dt=2dx}^{t=2x}\Big|=\frac{1}{2}\int_0^2\sqrt{1+t^2}dt$$
$$=\frac{1}{4}\left[t\sqrt{t^2+1}+\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)\right]\Big|_0^2=\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{4}\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\approx 1{,}47894.$$

6. Дужина дате криве је
$$\ell=\int_1^e\sqrt{1+y'^2}dx=\int_1^e\sqrt{1+\left(2x-\frac{1}{8x}\right)^2}dx=\int_1^e\sqrt{4x^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{64x^2}}\,dx$$
$$=\int_1^e\left(2x+\frac{1}{8x}\right)dx=\left(x^2+\frac{1}{8}\ln x\right)\Big|_1^e=e^2-\frac{7}{8}\approx 6{,}51406.$$

7. Дужина криве је $\ell=\displaystyle\int_{-1}^1\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi=\int_{-1}^1\sqrt{2e^{2\varphi}}\,d\varphi=\sqrt{2}\int_{-1}^1e^{\varphi}d\varphi=\sqrt{2}(e-e^{-1})\approx 3,32397$.

8. Тражена дужина је
$$\ell=\int_0^{2\pi}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}\,dt=\int_0^{2\pi}2\sin\frac{t}{2}\,dt=-4\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=8.$$

9. Запремина је
$$V=\pi\int_0^{2\pi}\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)^2dx=\pi\int_0^{2\pi}\left(\sin^2x+\sin x+\frac{1}{4}\right)dx=\pi\left(\frac{3}{4}x-\cos x-\frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_0^{2\pi}=\frac{3}{2}\pi^2\approx 14{,}8044.$$

10. Запремина је $V=\pi\displaystyle\int_0^1y^2dx=\pi\int_0^1x^2\left(1-x^3\right)^{2/3}dx=\Big|{}_{dt=-3t^2}^{t=1-x^3}\Big|=\frac{1}{3}\pi\int_0^1t^{2/3}dt=\frac{1}{5}\pi\approx 0,62832$.

11. Функција $f(x)=(x+1)e^x$ је растућа и $f(0)=1$ и $f(1)=2e$. Дакле, дата фигура је у области $0\leqslant x\leqslant 1$. Запремина цилиндра које се добија ротирањем целе ове области између x-осе и праве $y=2e$ је
$$V_1=\pi\int_0^1(2e)^2dx=4\pi e^2.$$

Запремина „шупљине” нашег обртног тела, тј. дела између x-осе и криве $y = f(x)$, је

$$V_2 = \pi \int_0^1 (x+1)^2 e^{2x} dx = \frac{1}{4}\pi e^{2x}(2x^2+2x+1)\,\Big|_0^1 = \frac{1}{4}\pi(5e^2-1).$$

Тражена запремина је $V_1 - V_2 = \frac{1}{4}\pi(11e^2+1) \approx 64{,}6223$.

12. Запремина је

$$V = \pi\int_0^\infty y^2 dx = \pi\int_0^\infty x^3(x^4+2)^{-3/2}dx = \left|\begin{smallmatrix} t=x^4+2\\ dt=4x^3dx\end{smallmatrix}\right| = \frac{\pi}{4}\int_2^\infty t^{-3/2}dt = -\frac{\pi}{4}\cdot 2t^{-1/2}\Big|_2^\infty = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1{,}11072.$$

13. Пошто се ротира око y-осе, у формули за запремину x и y мењају улоге. При томе је $0 \leqslant y \leqslant 10$:

$$V = \pi\int_0^{10} x^2 dy = \pi\int_0^2 x^2(1+3x^2)dx = \pi\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^5\right)\Big|_0^5 = \frac{328}{15}\pi = 68{,}6962.$$

14. Тражена запремина је

$$V = \frac{2}{3}\pi\int_0^\pi r^3\sin\varphi\, d\varphi = \frac{2}{3}\pi\int_0^\pi (1+\cos\varphi)^3\sin\varphi\, d\varphi = \left|\begin{smallmatrix} t=1+\cos\varphi\\ dt=-\sin\varphi\, d\varphi\end{smallmatrix}\right| = \frac{2}{3}\pi\int_0^2 t^3 dt = \frac{8}{3}\pi \approx 8{,}37758.$$

15. Сфера се може добити ротирањем полукруга $y = \sqrt{1-x^2}$ за $-1 \leqslant x \leqslant 1$ око x-осе. Како је $y' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ и $1+y'^2 = \frac{1}{1-x^2}$, површина сфере је (као што већ знамо)

$$P = 2\pi\int_{-1}^1 y\sqrt{1+y'^2}dx = 2\pi\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}\,dx = 2\pi\int_{-1}^1 dx = 4\pi \approx 12{,}5664.$$

16. Имамо $y' = \frac{9x-1}{6\sqrt{x}}$ и $\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{\frac{81x^2+18x+1}{36x}} = \frac{9x+1}{6\sqrt{x}}$. Тражена површина је онда

$$P = 2\pi\int_0^1 y\sqrt{1+y'^2}\,dx = 2\pi\int_0^1 \sqrt{x}\left(x-\frac{1}{3}\right)\frac{9x+1}{6\sqrt{x}}\,dx = 2\pi\int_0^1\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{18}\right)dx = \frac{5}{9}\pi \approx 1{,}74533.$$

17. Површина је

$$\begin{aligned} P &= 2\pi\int_0^\pi y\sqrt{1+y'^2}dx = 2\pi\int_0^\pi \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}dx = \left|\begin{smallmatrix} t=\cos x\\ dt=-\sin x\, dx\end{smallmatrix}\right| = 2\pi\int_{-1}^1\sqrt{1+t^2}dt \\ &= \pi\big[t\sqrt{t^2+1} + \ln\big(t+\sqrt{t^2+1}\big)\big]\Big|_{-1}^1 = 2\pi\big[\sqrt{2} + \ln\big(1+\sqrt{2}\big)\big] \approx 14{,}4236. \end{aligned}$$

18. Површина је $P = 2\pi\int_0^3 y\sqrt{1+y'^2}dx = 2\pi\int_0^3 x(9-x^2)\sqrt{1+(9-3x^2)^2}dx$. Ако уведемо смену $t = 9-3x^2$, $dt = -6xdx$, онда је $9-x^2 = 6+\frac{1}{3}t$ и

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{3}\pi\int_{-18}^9\left(6+\frac{1}{3}t\right)\sqrt{t^2+1}\,dt = \frac{1}{3}\pi\left(3t\sqrt{t^2+1} + 3\ln(t+\sqrt{t^2+1}) + \frac{1}{9}(t^2+1)^{3/2}\right)\Big|_{-18}^9 \\ &= \pi\left(\frac{805}{27}\sqrt{13} + \frac{325}{27}\sqrt{82} + \ln(9+\sqrt{82}) + \ln(18+\sqrt{325})\right) \approx 700{,}502. \end{aligned}$$

19. Парабола сече праву $y = 2x$ за $x = 2$ (и $x = 8$, али та пресечна тачка не одговара опису), а x-осу за $x = 4$. Спољашњост обртног тела састоји се из три дела:

   (1°) Површи настале ротирањем сегмента праве $y = 2x$ за $0 \leqslant x \leqslant 2$. Њена површина је $P_1 = 2\pi\int_0^2 y\sqrt{1+y'^2}\,dx = 2\pi\int_0^2 2x\sqrt{5}\,dx = 8\pi\sqrt{5}$.

   (2°) Површи настале ротирањем дела параболе $y = (x-4)^2$ за $2 \leqslant x \leqslant 4$. Њена површина је $P_2 = 2\pi\int_2^4 (x-4)^2\sqrt{1+(2(x-4))^2}dx = \frac{\pi}{4}\int_{-4}^0 u^2\sqrt{1+u^2}du$ (смена $u = 2(x-4)$), па добијамо $P_2 = \frac{\pi}{32}\left[u(2u^2+1)\sqrt{u^2+1} - \ln\left(u+\sqrt{u^2+1}\right)\right]\Big|_{-4}^0 = \pi\left(\frac{33}{8}\sqrt{17} - \frac{1}{32}\ln(4+\sqrt{17})\right)$.

Укупна површина је $P = P_1 + P_2 = \pi[8\sqrt{5} + \frac{33}{8}\sqrt{17} - \frac{1}{32}\ln(4+\sqrt{17})] \approx 109{,}424$.

20. Имамо $r' = 2\sin\varphi\cos\varphi$ и $r^2 + r'^2 = (4\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\cos^2\varphi = \frac{5-3\cos 2\varphi}{2}\cdot\cos^2\varphi$. Површина је

$$\begin{aligned} P &= 2\pi\int_0^{\pi/2} r\sqrt{r^2+r'^2}\sin\varphi\, d\varphi = 2\pi\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\sqrt{\tfrac{5-3\cos 2\varphi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\sqrt{5-3\cos 2\varphi}\sin 2\varphi\, d\varphi = \left|\begin{smallmatrix} t=5-3\cos 2\varphi\\ dt=6\sin 2\varphi d\varphi\end{smallmatrix}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\int_2^8\frac{8-t}{6}\sqrt{t}\cdot\frac{1}{6}dt = \frac{94}{135}\pi \approx 2{,}18748. \end{aligned}$$