

$$4.43 \quad \zeta = 0,5 \frac{\text{N}}{\text{cm}}$$

$$G = 9 \text{ N} \Rightarrow m = \frac{G}{g} = \frac{9}{9,81} = 0,92 \text{ kg}$$

$$\omega = 4\pi \text{ s}^{-1}$$

$$v = 1 \text{ cm/s} \quad F_w = 0,02 \text{ N}$$

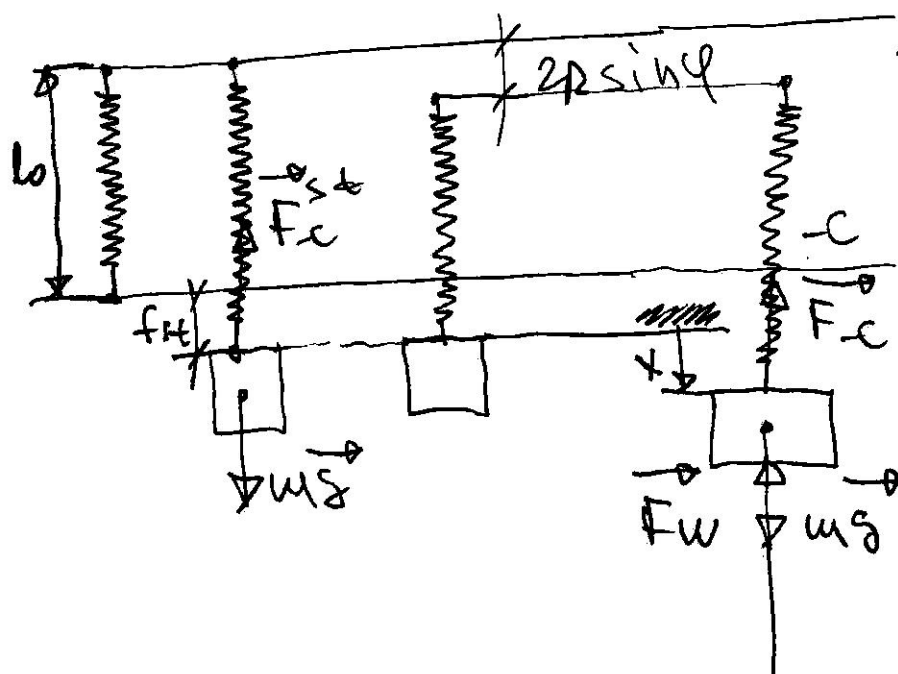
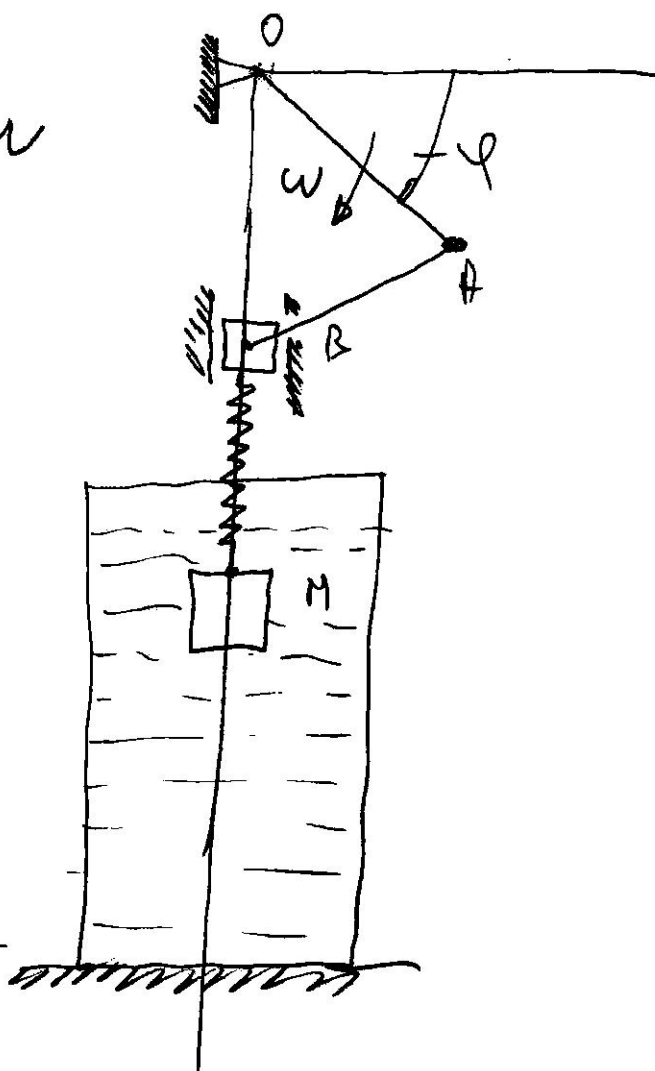
$$\varphi = 0$$

$$\overline{OA} = \overline{AB} = 3 \text{ cm} = R$$

XP-?

$$F_w = \beta \dot{x} \Rightarrow \beta = \frac{F_w}{\dot{x}} = \frac{F_w}{v}$$

$$\beta = \frac{0,02 \text{ N}}{0,01 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 2 \frac{\text{Ns}}{\text{cm}}$$



$$\Delta l = f_{st} - 2R \sin \varphi + x$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow d\varphi = \omega dt$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t / 0$$

$$\varphi = 4\pi t$$

$$m \ddot{x} = mg - \zeta (f_{st} + x - 2R \sin(4\pi t)) - \beta \dot{x} = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{\beta}{m} \dot{x} + \frac{\zeta}{m} x = \frac{2 - \zeta R}{m} \sin(4\pi t)$$

$$2\sqrt{\frac{B}{m}} = \frac{2}{0,102} = 19,62$$

$$\omega^2 = \frac{c}{m} = \frac{50}{0,102} = 490,5$$

$$\ddot{x} + 19,62 \dot{x} + 490,5 x = 29,43 \sin(4\pi t)$$

$$x = x_h + x_p$$

$$x_p = A \sin(4\pi t) + B \cos(4\pi t)$$

$$\dot{x}_p = 4\pi A \cos(4\pi t) - 4\pi B \sin(4\pi t)$$

$$\ddot{x}_p = -16\pi^2 A \sin(4\pi t) - 16\pi^2 B \cos(4\pi t)$$

$$-16\pi^2 A \sin(4\pi t) - 16\pi^2 B \cos(4\pi t) + 19,62 \cdot 4\pi A \cos(4\pi t) - 19,62 \cdot 4\pi B \sin(4\pi t)$$

$$+ 490,5 A \sin(4\pi t) + 490,5 B \cos(4\pi t) = 29,43 \sin(4\pi t)$$

$$(-16\pi^2 A - 19,62 \cdot 4\pi B + 490,5 A) \sin(4\pi t) +$$

$$+ (-16\pi^2 B + 19,62 \cdot 4\pi A + 490,5 B) \cos(4\pi t) = 29,43 \sin(4\pi t)$$

$$332,586 A - 246,552 B = 29,43 \quad (1)$$

$$332,586 B + 246,552 A = 0 \quad (2)$$

$$(2) \Rightarrow B = - \frac{246,552}{332,586} A$$

$$332,586 A + \frac{246,552^2}{332,586} A = 29,43$$

$$A = \frac{29,43.332,586}{332,586^2 + 246,552^2} = 0,0571$$

$$B = -0,0423$$

$$x_p = 0,0571 \sin(4\pi t) - 0,0423 \cos(4\pi t) \text{ [m]}$$

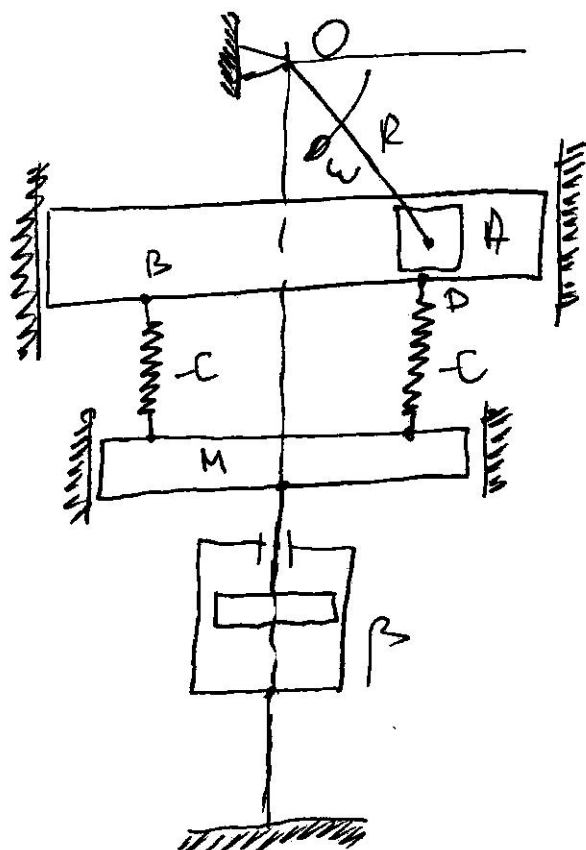
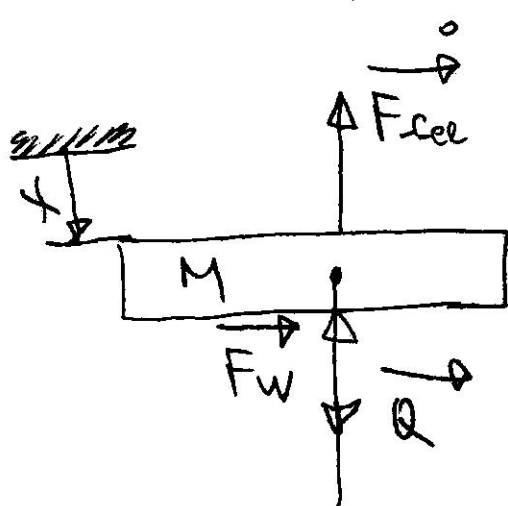
4. 44 $Q = 98 \text{ N}$
 $c = 0.3 \text{ N/cm}$

$$J = W$$

$$R = \overline{OA} = 7.5 \text{ cm}$$

$$\omega = 6.5^\circ$$

XA-2

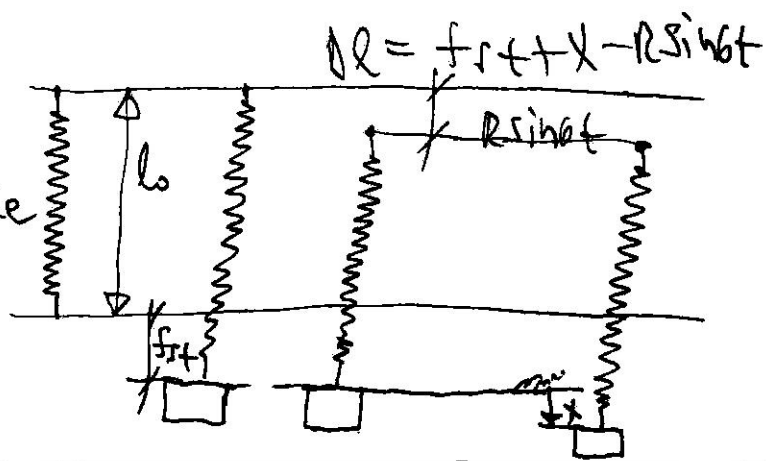


$$-C_e = -f + f = 2 - C = 2 \cdot 6,8 \cdot 100 = 1360 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$m \ddot{x} = mg - c_e(x + f_1 t - R \sin 6t) - \beta \dot{x}$$

$$\sum x_i = 0, \quad \text{mg} - -C_{\text{eff}}^{\text{st}}$$

$$\ddot{x} + \frac{\beta}{m} \dot{x} + \frac{\gamma_{\text{eq}}}{m} x = \frac{g}{m} \sin \theta + \gamma_e$$



$$2\sqrt{\frac{\beta}{m}}, \quad \omega^2 = \frac{5e}{m}$$

$$\sqrt{\frac{\beta}{m}} = \omega$$

$$\frac{\beta}{2m} = \sqrt{\frac{5e}{m}}$$

$$\beta = 2m \sqrt{\frac{5e}{m}} = 2 \sqrt{m \cdot 5e} = 2 \sqrt{10 \cdot 1360} = 233,238 \frac{N \cdot s}{m}$$

$$2\sqrt{\frac{\beta}{m}} = \frac{\beta}{m} = \frac{233,238}{\frac{98}{9,8}} = \frac{233,238}{10} = 23,324$$

$$\omega^2 = \frac{5e}{m} = \frac{1360}{10} = 136$$

$$\ddot{x} + 23,324\dot{x} + 136x = 10,2 \sinh(6t)$$

$$x = x_h + x_p$$

$$x_p = A \sinh(6t) + B \cosh(6t)$$

$$\dot{x}_p = 6A \cosh(6t) - 6B \sinh(6t)$$

$$\ddot{x}_p = 36A \sinh(6t) - 36B \cosh(6t)$$

$$-36A \sinh(6t) - 36B \cosh(6t) + 23,324 \cdot 6A \cosh(6t) - 23,324 \cdot 6B \sinh(6t) + 136A \sinh(6t) + 136B \cosh(6t) = 10,2 \sinh(6t)$$

$$(-36A - 23,324 \cdot 6B + 136A) = 10,2 \quad (1)$$

$$(-36B + 23,324 \cdot 6A + 136B) = 0 \quad (2)$$

$$100A - 139,943B = 10,2 \quad (1)$$

$$100B + 139,943A = 0 \quad (2)$$

$$(2) \Rightarrow B = -\frac{139,943}{100}A$$

$$100A + \frac{139,943^2}{100}A = 10,2$$

$$A = \frac{100 \cdot 10,2}{100^2 + 139,943^2} = 0,0345$$

$$B = -0,0483$$

$$x_f = 0,0345 \sin(6t) - 0,0483 \cos(6t) [m]$$

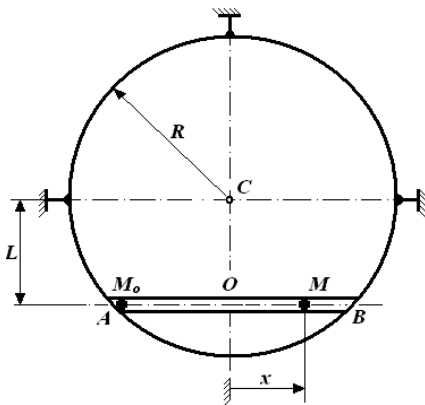
МЕХАНИКА М

МЕХ 220-0004

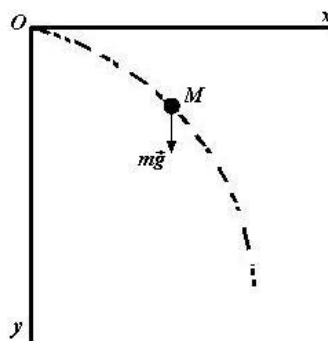
11. септембар 2014.

Друга група

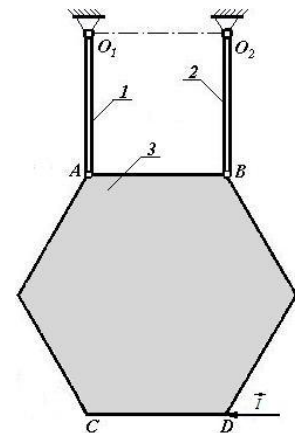
1. Дуж хоризонталне тетиве AOB диска полупречника $R = 50\text{cm}$ који се налази у вертикалној равни креће се куглица M масе $m = 0,5\text{kg}$. На куглицу дејствује еластична сила пропорционална растојању куглице M до центра диска C , са смером ка центру C (коэффициент пропорционалности је $c = \frac{25}{2}\text{N/m}$). На куглицу дејствује сила отпора кретању пропорционална првом степену брзине куглице са коэффициентом пропорционалности $b = 4\text{Ns/m}$. Нормално растојање тетиве до центра диска је $L = 30\text{cm}$. Ако је куглици у почетном тренутку, док се налазила у крајњем левом положају приказаног на слици, саопштена почетна брзина интензитета $V_0 = 40\text{cm/s}$ у смеру осе Ox , одредити закон кретања куглице, као и време после кога ће куглица први пут проћи кроз положај равнотеже.
2. Тачка M , масе m_0 , започиње кретање из координатног почетка из стања мировања у односу на усвојен Декартов координатни систем Oxy у хомогеном пољу Земљине теже. При кретању на тачку дејствује сила отпора, колинеарна са брзином тачке, чији је интензитет пропорционалан квадрату њене брзине са коэффициентом пропорционалности k . Вектор релативне брзине, којом се честице одвајају од тачке, константног је интензитета u_r , а смера супротног смеру од вектора брзине тачке. Одредити закон промене масе $m = m(t)$, као и коначне једначине кретања тачке, ако се тачка креће по параболи $y = bx^2$.
3. Хомогени штапови 1 и 2 који се налазе у вертикалној равни, сваки масе M и дужине a , зглобно су везани крајевима O_1 и O_2 за непокретне ослоње. За крајеве A и B штапова зглобно је везана хомогена правилна шестострана плоча 3, масе $m = M/3$ и дужине странице a . Када се систем налази у положају равнотеже, приказаног на слици, у тачки C плоче за време удара дејствује сила чији је импулс \vec{I} усмерен дуж странице DC . Одредити максимални отклон штапова након дејства ударног импулса.



Слика уз задатак 1.



Слика уз задатак 2.



Слика уз задатак 3.

МЕХАНИКА М

МЕХ 220-0004

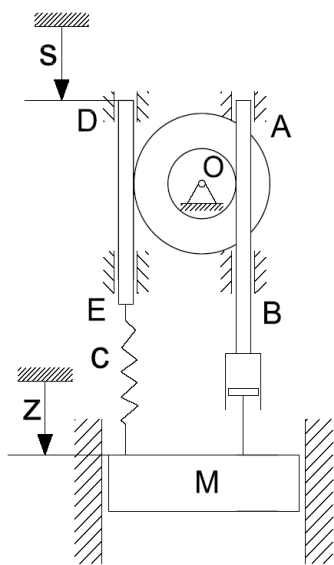
09. јул 2015.

Прва група

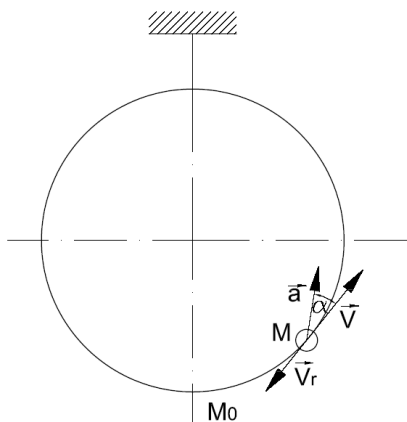
1. Два коаксијална међусобно круто спојена цилиндра полупречника R и $2R$ обрћу се око непокретне хоризонталне осе која пролази кроз тачку O (слика 1). Дискови покрећу зупчасте летве, AB и DE . За крај B летве AB везан је цилиндар пригушивача, а за крај E летве DE опруга крутости $c = 13N/m$. Летва DE креће се по закону $s(t) = \sin(2t)$. Тело M , масе $m = 1kg$, везано је за клип пригушивача и други крај опруге. Кретањем клипа у цилиндру пригушивача јавља се сила отпора кретању пропорционална првом степену брзине клипа у односу на цилиндар. Коефицијент пропорционалности је $b = 6Ns/m$. Одредити коначну једначину кретања тела M ако је у почетном тренутку оно мировало у положају статичке равнотеже. За координатни почетак узети положај статичке равнотеже. (Оса z је усмерена вертикално наниже).

2. Прстен M може да се креће по глаткој непомичној кружној жици полупречника R која се налази у вертикалној равни (слика 2). Смер релативне брзине којом се честице одвајају је супротан од смера брзине прстена. Маса прстена мења се по закону $m = m_0 e^{-b^2 t}$ ($b = const.$). Одредити закон промене интензитета релативне брзине којом се честице одвајају у функцији од времена ако вектор убрзања прстена заклапа угао од $\alpha = 30^\circ$ са вектором брзине прстена. У почетном тренутку тачка је била у положају M_0 и имала брзину интензитета V_0 .

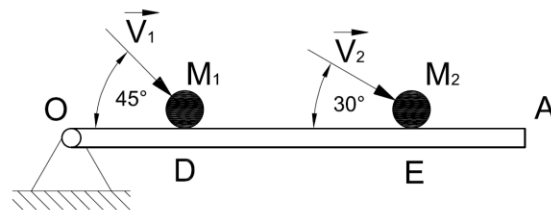
3. Хомогени штап OA , масе m и дужине $4R$, зглобно је везан у тачки O (слика 3). Куглице M_1 и M_2 , једнаких маса m , ударају истовремено брзинама интензитета $V_1 = V_2 = V_0$ под угловима 45° и 30° у тачке D и E штапа. Ако је удар идеално еластичан, одредити угаону брзину штапа и брзине куглица после удара. Пре удара штап је био у стању мировања. $OD = R$, $OE = 3R$.



Слика 1



Слика 2



Слика 3

1) $R = 50 \text{ cm}$

$$m = 0,5 \text{ kg}$$

$$C = \frac{25}{2} \text{ N/m}$$

$$b = \frac{h \cdot \frac{N \cdot S}{m}}$$

$$L = 30 \text{ cm}$$

$t_0 = 0 \quad A \equiv M_0, V_0 = 40 \text{ cm/s}$

$$X(t) - t \cdot 1?$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 \overline{MC} \cdot \sin \alpha - b \dot{x}$$

$$\sin \alpha = \frac{x}{mc}$$

$$m\ddot{x} = -\epsilon x - b\dot{x} \quad 1^{st}$$

$$\ddot{x} + \frac{b}{m} \dot{x} + \frac{c}{m} x = 0$$

$$\frac{b}{a} = 2\sqrt{2} = \frac{4}{0,5} = 8 \quad ; \quad \omega^2 = \frac{c}{a} = \frac{25}{0,5} = 25$$

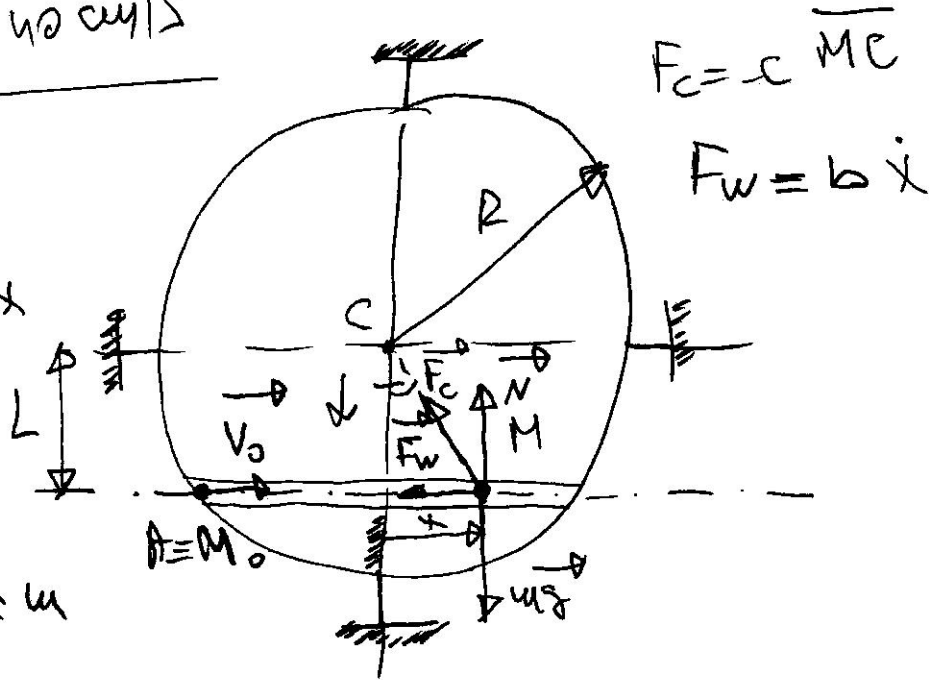
$$x^2 + 8x + 25 = 0$$

$$x^2 + 8x + 25 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 100}}{2} = -4 \pm 3i$$

$$X = \frac{-4t(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t)}{e}$$

$$\dot{x} = -4e^{-4t} (C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t) + 3e^{-4t} (-C_1 \sin 3t + C_2 \cos 3t)$$

$$t_0 = 0: \quad x_0 = -\sqrt{R^2 - L^2} = -40 \text{ cm}, \quad \dot{x}_0 = 40 \text{ m/s}$$



$$-40 = C_1$$

$$40 = -4 C_1 + 3 C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{40 + 4 C_1}{3} = \frac{40 - 4 \cdot 40}{3}$$

$$C_2 = - \frac{3 \cdot 40}{3} = -40$$

$$x = -40 e^{-4t} (\cos 3t + \sin 3t)$$

$$x(t_1) = 0$$

$$\cos 3t_1 + \sin 3t_1 = 0$$

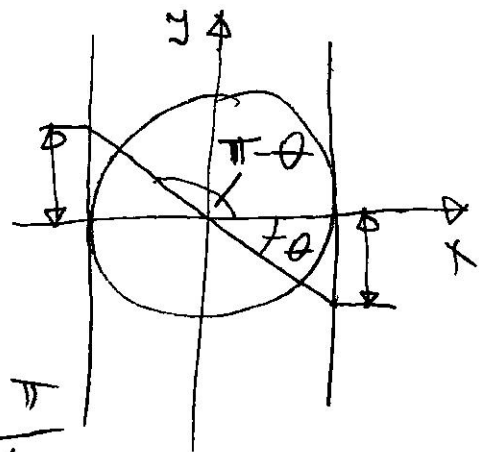
$$\sin 3t_1 = -\cos 3t_1 \quad \therefore \cos 3t_1$$

$$\tan 3t_1 = -1$$

$$\tan 3t_1 = -\tan(\pi - 3t_1)$$

$$\tan(\pi - 3t_1) = 1 \Rightarrow \pi - 3t_1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{t_1} = \frac{1}{3} \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{3} \frac{3\pi}{4} = \boxed{\frac{\pi}{4} \text{ s}}$$



2) $R, 2R$

$$C = 13 \frac{N}{m}$$

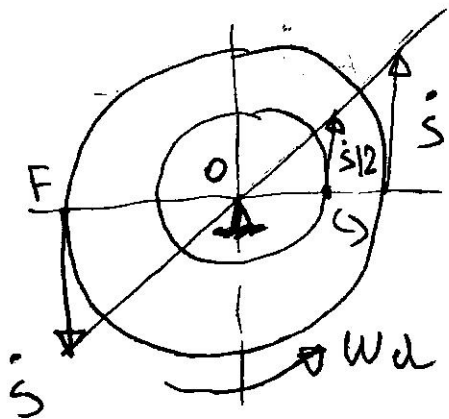
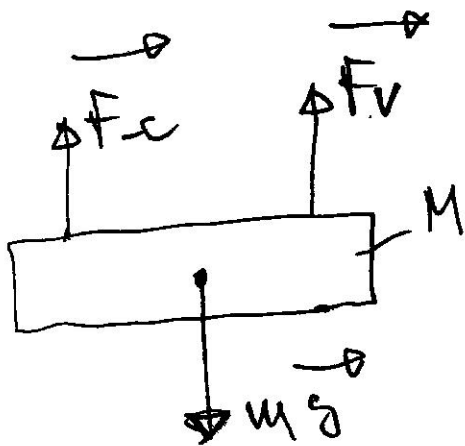
$$S_1(t) = \sin \eta^2 t$$

$$u = 145$$

$$b = 6 \text{ N s/m}$$

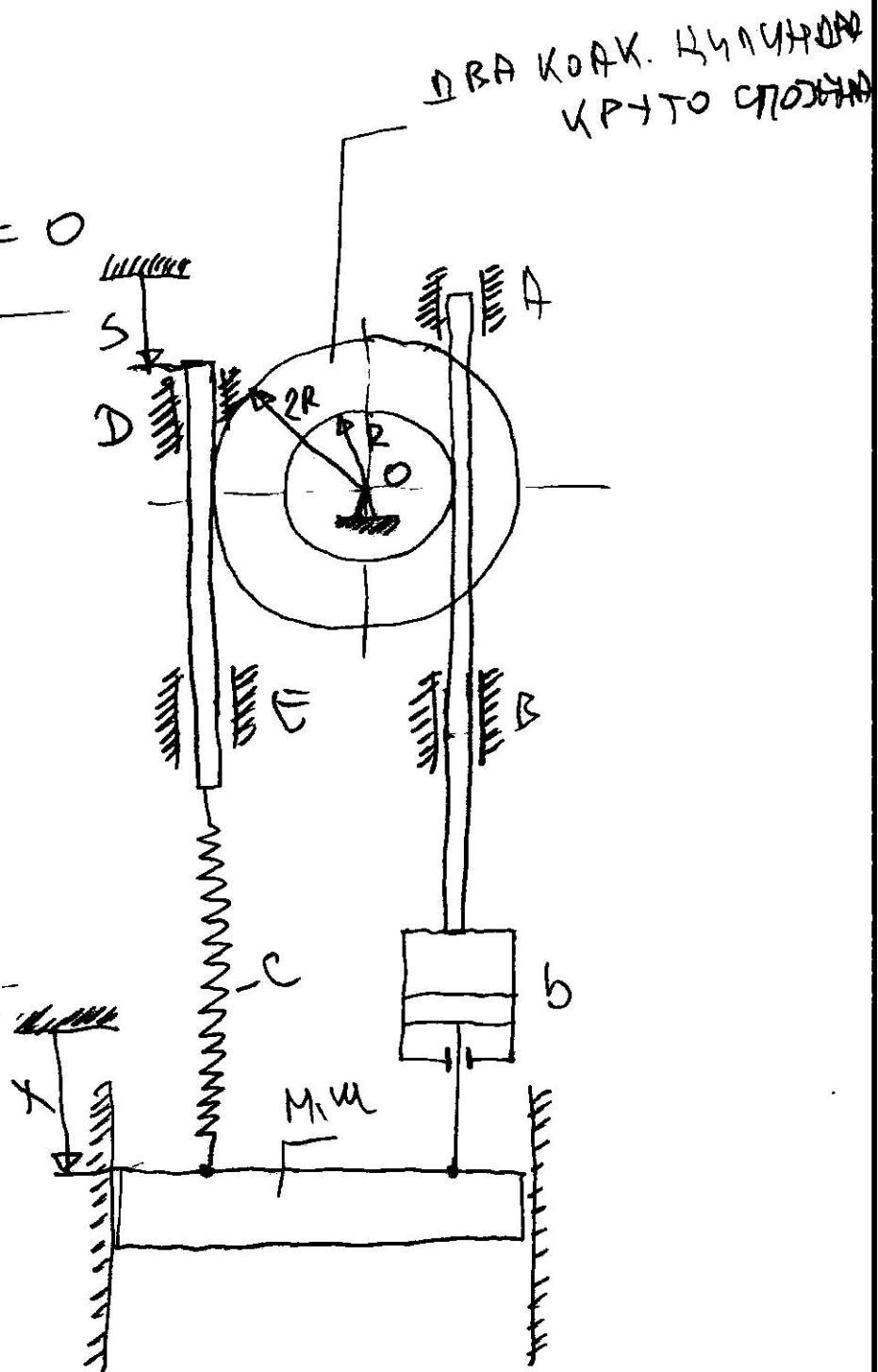
$$t_0 = 0 \quad x_0 = 0 \quad \dot{x}_0 = 0$$

21-121



$$s = \sin 2t$$

$$\dot{z} = z \cos \alpha t = V_F$$



$$V_F = 2R \omega d$$

$$w dz = \frac{r \cos \theta}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r}$$

$$V_g = R \omega_d \cos \omega_d t$$

$$m \ddot{x} = m \cancel{g} - \cancel{c} (\dot{x} + \cancel{f_{st}} - s) - b (\dot{x} + v_G)$$

$$\sum X_i = 0, \quad m \cancel{g} - \cancel{c} \cancel{f_{st}} = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{b}{m} \dot{x} + \frac{c}{m} x = \frac{c}{m} s - \frac{b}{m} \cos 2t$$

$$\frac{b}{m} = \frac{6}{1} = 6; \quad \omega^2 = \frac{c}{m} = \frac{13}{1} = 13$$

$$\ddot{x} + 6 \dot{x} + 13 x = 13 \sin 2t - 6 \cos 2t$$

$$x = x_h + x_p$$

$$\lambda^2 + 6\lambda + 13 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} = -3 \pm 2i$$

$$x_h = e^{-3t} (C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)$$

$$x_p = A \cos 2t + B \sin 2t$$

$$\dot{x}_p = -2A \sin 2t + 2B \cos 2t$$

$$\ddot{x}_p = -4A \cos 2t - 4B \sin 2t$$

$$\begin{aligned} -4A \cos 2t - 4B \sin 2t - 12A \cos 2t + 12B \sin 2t + 13A \cos 2t + 13B \sin 2t \\ = 13 \cos 2t - 6 \sin 2t \end{aligned}$$

$$-4B - 12A + 13B = 13 \quad (1)$$

$$-4A + 12B + 13A = -6 \quad (2)$$

$$9B - 12A = 13 \quad (1)$$

$$9A + 12B = -6 \quad (2)$$

$$(2) \Rightarrow B = -\frac{1}{12}(6 + 9A) = -\frac{2}{4} - \frac{3}{4}A =$$

$$= -\frac{1}{4}(2 + 3A)$$

$$-\frac{9}{4}(2 + 3A) - 12A = 13$$

$$-\frac{9}{2} - \frac{27}{4}A - 12A = 13$$

$$\frac{75}{4}A = -\frac{9}{2} - 13 = -\frac{35}{2}$$

$$\boxed{A = -\frac{70}{75}} = -\frac{14}{15}$$

$$B = -\frac{1}{4}\left(2 - \frac{14}{5}\right) = -\frac{1}{4}\left(2 - \frac{14}{5}\right) =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{10-14}{5}\right) = +\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} = \boxed{\frac{1}{5}}$$

$$X_p = -\frac{14}{15} \cos 2t + \frac{1}{5} \sin 2t$$

$$X = e^{-3t} \left(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t \right) - \frac{14}{15} \cos 2t + \frac{1}{5} \sin 2t$$

$$\dot{x} = -3e^{-3t} (C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) + 2e^{-3t} (-C_1 \sin 2t + C_2 \cos 2t) + \frac{28}{15} \sin 2t + \frac{2}{5} \cos 2t$$

$$t=0: x_0=0, \dot{x}_0=0$$

$$0 = C_1 - \frac{14}{15} \Rightarrow \boxed{C_1 = \frac{14}{15}}$$

$$0 = -3C_1 + 2C_2 + \frac{2}{5} \Rightarrow C_2 = \frac{1}{2} \left(3C_1 - \frac{2}{5} \right)$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \left(3 \cdot \frac{14}{15} - \frac{2}{5} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{14}{5} - \frac{2}{5} \right) = \frac{6}{5}$$

$$x = \frac{2e^{-3t}}{15} (17 \cos 2t + 9 \sin 2t) - \frac{14}{15} \cos 2t + \frac{1}{5} \sin 2t$$
