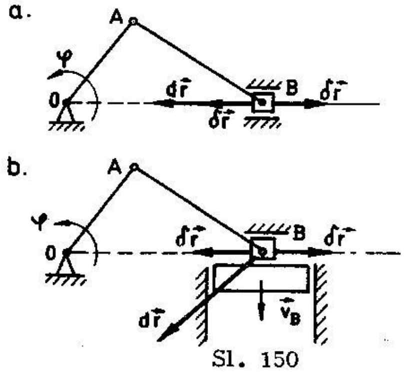
Primer stacionarne holonomne veze je veza sa postoljem klizača B (sl.150 a), koji ima dva moguća pomeranja, a stvarno pomeranje je jedno od mogućih. To nije slučaj kada je postolje klizača B (sl.150 b) pokretno i stvarno pomeranje $d\vec{r}$ nije nijedno od mogućih, jer se pomeranja $\delta\vec{r}$ odredjuju pri zaustavljenom kretanju i postolja i klizača.

Stvarno pomeranje $d\vec{r}$ predstavlja diferencijal funkcije $\vec{r}=\vec{r}\ (t)$, kojom se opisuje kretanje tačke, dok je moguće pomeranje $\delta\vec{r}$ po svome smislu proizvoljna varijacija funkcije $\vec{r}\ (t)$. Analogno varijacijama koordinata, vektor mogućeg (virtualnog) pomeranja $\delta\vec{r}$ predstavlja elementarnu promenu funkcije, menjajući njen oblik pri konstantnoj vrednosti argumenta t.



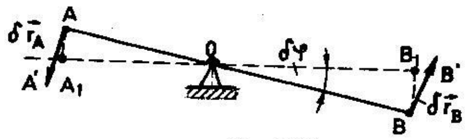
Sl. 150

Analogno sa poznatim obrascem

$$d\vec{r} = \vec{i}\,dx + \vec{j}\,dy + \vec{k}\,dz,$$

prikazujemo i vektor $\delta\vec{r}$ preko varijacija koordinata, kao svojih projekcija:

$$\delta\vec{r} = \vec{i}\,\delta x + \vec{j}\,\delta y + \vec{k}\,\delta z.$$



Sl. 151

Geometrijsku interpretaciju mogućeg pomeranja, koje odredjujemo kao malu veličinu prvog reda, možemo prikazati na primeru poluge AB (sl.151). Pri tome moguća pomeranja $\delta\vec{r}_A=\overrightarrow{AA'}$ i $\delta\vec{r}_B = \overrightarrow{BB'}$, treba shvatiti kao vektore u pravcima tangenti na lukove $\widehat{AA_1}$ i $\widehat{BB_1}$, a izračunavamo ih po obrascima

$$|\delta\vec{r}_A| = \overline{OA}.\delta\varphi \quad ,|\delta\vec{r}_B| = \overline{OB}.\delta\varphi \quad .$$

Rad sila na mogućem pomeranju. Generalisana sila. Idealne veze.

Pretpostavljamo da na sistem materijalnih tačaka M_i $(i=1,2,\ldots,n)$ dejstvuje sistem sila $\vec{F}_i$ $(i=1,2,\ .\ .\ ,n)$. U odredjenom položaju materijalnog sistema, koji zauzima u datom fiksiranom trenutku t_o, ove sile imaju vrednosti $\vec{F}_i\,(t_o)$.

Posmatramo li jednu tačku M_i sistema u trenutku t_o, pod radom sile $\vec{F}_i(t_o)$ na mogućem pomeranju $\delta\vec{r}_i$ ove tačke podrazumeva se proizvod

$$\delta A_i = \vec{F}_i . \delta\vec{r}_i = F_i\,\delta s_i \cos(\vec{F}_i, \delta\vec{r}_i), \tag{21.21}$$

gde je uzeta u obzir jednakost intenziteta mogućeg pomeranja i luka moguće trajektorije tačke M_i $|\delta\vec{r}_i| = \delta s_i$. Isti izraz možemo napisati i u obliku

$$\delta A_i = X_i\,\delta x_i + Y_i\,\delta y_i + Z_i\,\delta z_i. \tag{21.22}$$

Za sve tačke sistema rad na mogućem pomeranju dobijamo sabiranjem mogućih radova pojedinih sila

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} \delta A_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i . \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n} F_i\,\delta s_i \cos(\vec{F}_i, \delta\vec{r}_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (X_i\,\delta x_i + Y_i\,\delta y_i + Z_i\,\delta z_i). \tag{21.23}$$

Radi kraćeg izražavanja ovaj rad se zove mogući rad.

Da bismo prikazali mogući rad preko generalisanih koordinata, odnosno njihovih varijacija, pretpostavljamo da je sistem holonoman.
Prema izrazu (21.19) nalazimo

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j .$$

Uvedemo li oznaku

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n} \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right), \qquad (21.24)$$

$$(j=1,2, \ldots ,s)$$

mogući rad dobija oblik

$$\delta A = \sum_{j=1}^{s} Q_j \delta q_j = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots + \ldots + Q_s \delta q_s . \qquad (21.25)$$

Po svojoj strukturi ova formula potseća na izraz $\delta A_i = X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i$, gde su množioci uz varijacije koordinata projekcije sila, pa se zato koeficijenti Q_j $(j=1,2, \ldots ,s)$ zovu generalisane sile, jer stoje uz varijacije generalisanih koordinata. Medjutim, u opštem slučaju generalisana sila Q_j nije sila u smislu na koji smo navikli. Njena dimenzija zavisi od dimenzije odgovarajuće generalisane koordinate q_j i odredjuje se jednakošću

$$[Q] = \frac{[rad]}{[q_j]} .$$

Izračunavanje generalisanih sila sistema je moguće na više načina. Prvi je način direktno primenjivanje obrasca (21.24). Drugi način koristi mogućnost saopštavanja sistemu više različitih skupova pomeranja. Tako je uvek moguće da se sistemu saopšte pomeranja tačaka pri kojima će da se menja samo jedna generalisana koordinata. Na primer, neka se menja samo koordinata q_1 a ostale ne menjaju. Tada je

$$\delta q_1 \neq 0, \ \delta q_2 = \delta q_3 = \ldots\ldots = \delta q_s = 0,$$

tako da sve sile vrše rad samo na pomeranju δq_1, veličine

$$\delta A' = Q_1 \delta q_1 ,$$

odakle je

$$Q_1 = \frac{\delta A'}{\delta q_1} .$$

Pod idealnim vezama podrazumevamo takve veze, kod kojih je zbir radova reakcija veza na proizvoljnom mogućem pomeranju jednak nuli.

Ako se $\vec{F}_{Ni}$ reakcije idealnih veza, tada je prema definiciji idealnosti

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{Ni} \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \qquad (21.27)$$

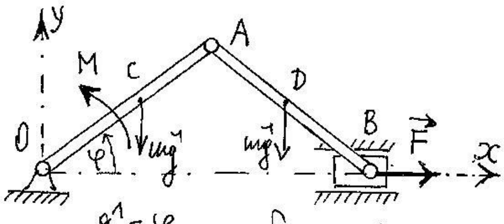
Kada je u pitanju jedna tačka na idealno glatkoj površi, uslov $\vec{F}_N \cdot \delta \vec{r} = 0$ ukazuje na upravnost reakcije i mogućeg pomeranja, koje je u tangencijalnoj ravni površi. Pri kretanju tačke po krivoj, vektor $\delta \vec{r}$ je u pravcu tangente na krivu i isti uslov ukazuje da je reakcije u normalnoj ravni krive. U slučaju dvostrane idealne veze (sl.153 a), kada je telo oslonjeno na donju stranu veze, ispunjen je isti uslov. Medjutim, ako je veza realna i telo je oslonjeno na donju stranu veze (sl.153 b), tada imamo ukupnu reakciju veze $\vec{F}_w = \vec{F}_N + \vec{F}_{tr}$ i njen je rad

$$F_N \delta s \cdot \cos(\vec{F}_N, \delta \vec{r}) + F_{tr} \delta s \cos(\vec{F}_{tr}, \delta \vec{r}) =$$

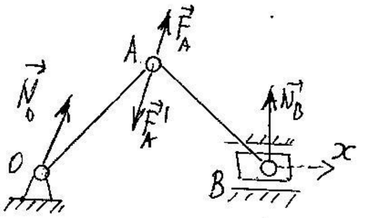
$$= F_N \delta s \cos 90^\circ + F_{tr} \delta s \cos 180^\circ =$$

$$= - F_{tr} \delta s \neq 0.$$

Sistem je u vertikalnoj ravni i sastoji se iz krivaje 0A mase m i dužine R, štapa AB mase m i dužine R, klizača B mase m. Veze su idealne. U tačkama 0, A, B su zglobne veze. Na klizač dejstvuje horizontalna sila $\vec{F}$ a na štap 0A dejstvuje spreg sila momenta M odrediti generalisanu silu za koordinatu φ.



$q^1=\varphi$ $\qquad \delta A = Q_\varphi \delta\varphi$



IDEALNE VEZE

zglob "A" $\vec{F}_A\cdot\delta\vec{r}_A + \vec{F}_A'\cdot\delta\vec{r}_A = 0$ (pošto je $\vec{F}_A = -\vec{F}_A'$)

zglob "0" $\vec{N}_0\cdot\delta\vec{r}_0 = 0$

zglob "B" $\vec{N}_B\cdot\delta\vec{r}_B = 0$

$$\delta A = \sum_i X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i$$

$m_C\vec{g} = m\vec{g} \Rightarrow$

$m_D\vec{g} = m\vec{g}$

$X_C=0 \quad Y_C=-mg$

$X_D=0 \quad Y_D=-mg$

Slično $\vec{F} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} X_B=F \\ Y_B=0 \end{array}\right]$

$$\delta A = \cancel{X_C}\delta x_C + Y_C\delta y_C + \cancel{X_D}\delta x_D + Y_D\delta y_D + X_B\delta x_B + \cancel{Y_B}\delta y_B + M\delta\varphi$$

$$\delta A = Y_C\delta y_C + Y_D\delta y_D + X_B\delta x_B + M\delta\varphi = -mg\,\delta y_C - mg\,\delta y_D + F\delta x_B + M\delta\varphi$$

$$\delta A = -mg\frac{R}{2}\cos\varphi\,\delta\varphi - \frac{mgR}{2}\cos\varphi\,\delta\varphi - 2FR\sin\varphi\,\delta\varphi + M\delta\varphi$$

$$\delta A = (M - mgR\cos\varphi - 2FR\sin\varphi)\,\delta\varphi \Rightarrow \boxed{Q_\varphi = M - mgR\cos\varphi - 2FR\sin\varphi}$$

$\vec{r}_C = \frac{R}{2}\cos\varphi\,\vec{i} + \frac{R}{2}\sin\varphi\,\vec{j}$

$x_C = \frac{R}{2}\cos\varphi \quad y_C = \frac{R}{2}\sin\varphi$

$\delta x_C = -\frac{R}{2}\sin\varphi\,\delta\varphi$

$\delta y_C = \frac{R}{2}\cos\varphi\,\delta\varphi$

slično

$x_D = \frac{3}{2}R\cos\varphi \quad y_D = \frac{R}{2}\sin\varphi$

$\delta x_D = -\frac{3}{2}R\sin\varphi\,\delta\varphi \quad \delta y_D = \frac{R}{2}\cos\varphi\,\delta\varphi$

*

$x_B = 2R\cos\varphi \quad y_B = 0$

$\delta x_B = -2R\sin\varphi\,\delta\varphi$

NAPOMENA: Ako sistem ima jedan stepen slobode kretanja zavisne varijacije smo preveli u tu jednu nezavisnu varijaciju, uz tu zavisnu varijaciju stoji funkcionalni sabirak u "zagradi" to je generalisana sila za tu koordinatu.

$$\delta A = \sum_i X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i = (\underbrace{Q_\varphi}_{\text{generalisana sila}})\,\boxed{\delta\varphi}$$ nezavisna varijacija

T.j. $\boxed{\frac{\delta}{\delta\varphi}(A) = Q_\varphi}$

(* * *)

Ako bi sistem ima $\boxed{\text{dva}}$ stepena slobode kretanja, na primer: ξ, φ

$$\delta A = \sum_i X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i = (Q_\xi)\underbrace{\delta\xi}_{\substack{\text{nezavisna}\\ \text{varijacija}\\ \delta\xi}} + (Q_\varphi)\underbrace{\delta\varphi}_{\substack{\text{nezavisna}\\ \text{varijacija}\\ \delta\varphi}}$$

Uz nezavisne varijacije stoji zapis za odgovarajuću generalisanu silu za tu generalisanu koordinatu

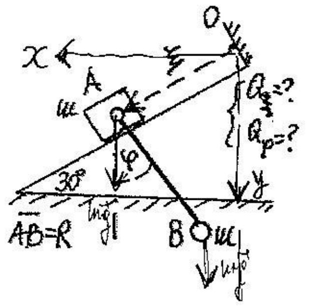
Q_ξ ; Q_φ

Približno: $\left[\frac{\delta}{\delta\xi}(A)\right]_{\delta\varphi=0} = Q_\xi \qquad \left[\frac{\delta}{\delta\varphi}(A)\right]_{\delta\xi=0} = Q_\varphi$

Generalisane sile Q_ξ , Q_φ ne moraju imati dimenzije sile, ali $\delta A = Q_\xi\,\delta\xi + Q_\varphi\,\delta\varphi$ mora imati dimenziju rada.

Primetimo da u metodama analitičke dinamike generalisanih koordinata ne figurišu eksplicitno ni jednačine veza ni reakcije idelanih veza!

PRIMER SA DVA STEPENA SLOBODE KRETANJA:



Eliptičko klatno se sastoji od klizača A, mase m, i masene tačke B mase m koja je lakim štapom dužine R zglobom vezana za klizač. Veza je idealna. Strma ravan je nagiba α=30°. Odrediti generalisane sile za generalisane koordinate ξ, φ.

$$\delta A = m_A\vec{g}\cdot\delta\vec{r}_A + m_B\vec{g}\cdot\delta\vec{r}_B$$

$$\begin{cases} X_A = 0 & Y_A = mg \\ X_B = 0 & Y_B = mg \end{cases}$$

$$\delta A = \underbrace{X_A}_{0}\delta x_A + Y_A\delta y_A + \underbrace{X_B}_{0}\delta x_B + Y_B\delta y_B$$

$$\vec{r}_A = (\xi\cos 30^\circ)\vec{i} + (\xi\sin 30)\vec{j}$$

$$\vec{r}_B = (\xi\cos 30^\circ - R\sin\varphi)\vec{i} + (\xi\sin 30^\circ + R\cos\varphi)\vec{j}$$

$$\delta x_A = \frac{\sqrt{3}}{2}\delta\xi \qquad \delta y_A = \frac{1}{2}\delta\xi$$

$$\delta x_B = \frac{\sqrt{3}}{2}\delta\xi - R\cos\varphi\,\delta\varphi, \qquad \delta y_B = \frac{1}{2}\delta\xi - R\sin\varphi\,\delta\varphi$$

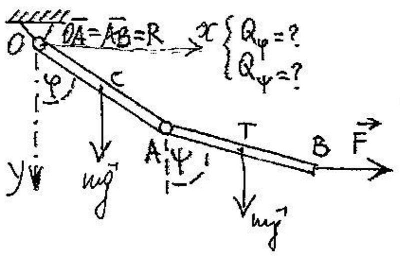
$$\delta A = mg\frac{1}{2}\delta\xi + mg\left(\frac{1}{2}\delta\xi - R\sin\varphi\,\delta\varphi\right)$$

$$\delta A = (mg)\delta\xi - (mgR\sin\varphi)\delta\varphi$$

$$\left[\frac{\delta}{\delta\xi}(A)\right]_{\delta\varphi=0} = Q_\xi = mg\,; \qquad \left[\frac{\delta}{\delta\varphi}(A)\right]_{\delta\xi=0} = Q_\varphi = -mgR\sin\varphi$$

$$\boxed{Q_\xi = mg} \qquad \boxed{Q_\varphi = -mgR\sin\varphi}$$

NAPOMENA: SILE REAKCIJE VEZA NISMO PRIKAZALI NA CRTEŽU POŠTO SU SVE VEZE KOJE DEJSTVUJU SISTEM "IDEALNE" * TE SU RADOVI OVIH SILA NA MOGUĆEM POMERANJU JEDNAKI NULI *



Sistem je u vertikalnoj ravni i sastoji se od dva štapa, OA (0A=R) i AB (AB=R), svaki mase m; veze u tačkama 0 i A su zglobne; osa 0y inercijalnog sistema 0xy je vertikalna. Ako na kraj štapa AB dejstvuje horizontalana sila $\vec{F}$, za date generalisane koordinate φ i Ψ odrediti generalisane sile.

DVA STEPENA SLOBODE KRETANJA $q_1=\varphi,\ q_2=\Psi$

$$\delta A = m_{0A}\vec g\cdot\delta\vec r_C + m_{AB}\vec g\cdot\delta\vec r_T + \vec F\cdot\delta\vec r_B \quad \left\{ m_{0A}\vec g = mg\vec j,\ m_{AB}\vec g = mg\vec j\quad \vec F = F\vec i \right\} \Rightarrow$$

$$\delta A = mg\,\delta y_C + mg\,\delta y_T + F\,\delta x_B$$

$$\vec r_C = x_C\vec i + y_C\vec j;\quad \vec r_T = x_T\vec i + y_T\vec j;\quad \vec r_B = x_B\vec i + y_B\vec j$$

$$y_C = \frac{R}{2}\cos\varphi \qquad \delta y_C = -\frac{R}{2}\sin\varphi\,\delta\varphi \qquad y_T = R\cos\varphi + \frac{R}{2}\cos\Psi \qquad \delta y_T = -R\sin\varphi\,\delta\varphi - \frac{R}{2}\sin\Psi\,\delta\Psi$$

$$x_B = R\sin\varphi + R\sin\Psi \qquad \delta x_B = R\cos\varphi\,\delta\varphi + R\cos\Psi\,\delta\Psi$$

$$\delta A = mg\left(-\frac{R}{2}\sin\varphi\,\delta\varphi\right) + mg\left(-R\sin\varphi\,\delta\varphi - \frac{R}{2}\sin\Psi\,\delta\Psi\right) + F\left(R\cos\varphi\,\delta\varphi + R\cos\Psi\,\delta\Psi\right)$$

$$\delta A = \left(FR\cos\varphi - \frac{3}{2}mgR\sin\varphi\right)\delta\varphi + \left(FR\cos\Psi - \frac{mgR}{2}\sin\Psi\right)\delta\Psi$$

$$\left(\frac{\delta A}{\delta\varphi}\right)_{\delta\Psi=0} = Q_\varphi = \left(FR\cos\varphi - \frac{3}{2}mgR\sin\varphi\right);\qquad \left(\frac{\delta A}{\delta\Psi}\right)_{\delta\varphi=0} = Q_\Psi = \left(FR\cos\Psi - \frac{mgR}{2}\sin\Psi\right)$$

NAPOMENA: RAD SILA IDEALNIH VEZA JE NULA NA MOGUĆEM POMERANJU SISTEMA. VARIJACIJE $\delta x_C,\ \delta x_T,\ \delta y_B$ POSTOJE (ZA VEŽBU IH NAPISATI) ALI SU OVDE NEVAŽNE JER SU KOMPONENTE SILA UZ NJIH NULA!