Professor L N Trefethen
(University of Oxford)

people.maths.ox.ac.uk/trefethen/

Book: Approximation Theory and Approximation Practice, Extended Edition (SIAM 2020)

Довољно је изучити Лагранжеов интерполациони полином. (На стандардним курсевима на факултетима изучавају се и остале форме:

- Newton-ови, са подељеним, са предњим, са задњим разликама;
- Гаусови 1. и 2. врсте;
- Стирлингови;
- Беселови;
- итд.

Нема потребе!)

Ова олакшица први пут примењена на одељења IVе и IVб Мат. гимназије у пролеће 2020. г. у време COVID-а 19.

Интерполација – 79 стр. (КЊИГА)

79., 80. стр. — Предавао сам уживо

Лагранжева интерполација:

стр 81, стр 82, почетак стр 83 – НАУЧИТИ

Теорма 3.1.3. – НЕ треба

На стр 84, пример 4.1. – Треба (обратити пажњу да log је природни логаритам што се у математичким књигама чешће означава са ln)

— Aitken-ова схема – НЕ ТРЕБА

Урадити пример 4.2. на стр. 85 али без коришћења Aitken-ове схеме

Лагранжева интерполација

x_k	x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$f(x_k)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$		$f(x_n)$

$y = f(x) \approx P_n(x)$ – Лагранжев интерполациони полином
($x \in [a,b]$; $a \le x_0 < x_1 < \dots < x_n \le b$ (*))

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k(x), \text{ где}$$

$$L_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

$(k = 0, 1, \dots, n)$.

Јасно да $L_k(x_i) = \begin{cases} 1, & k = i \\ 0, & k \ne i \end{cases} = \delta_{ik}$

δ_{ik} – Кронекеров делта симбол

$P_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$

што су интерполациони услови, а пошто је P_n полином n-тог степена и јединствено одређен условима (*), то је овако одређен (на један начин, онако како је то урадио Лагранж) тражени интерполациони полином.

Ако је $\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ тзв. функција грешке (или творна функција) покажите да:

$$L_k(x) = \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\,\omega'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Пример 1.

За скуп података

x_k	-1	0	2	3
$f(x_k)$	-1	2	10	35

Лагранжев интерполациони полином је $P_3(x) = \frac{5}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2 + 2$.

(проверите сами!)

Пример 2.

Одредити приближно $f(27)$ ако је функција f задата таблицом

x	14	17	31	35
$f(x)$	68.7	64.0	44.0	39.1

Решење.

$$f(27) \approx P_3(27)$$

а $P_3(27) = 49.31$. (проверите сами!)

Ово су примери за директну интерполацију, тј. ако је задато $x = x^*$ коришћењем Лагранжевог интерполационог полинома одређујемо $P_n(x^*)$ што нам даје $f(x^*) \approx P_n(x^*)$.

Инверзна интерполација (1. део)

У пракси се често јавља задатак одређивања вредности аргумента на основу задате вредности функције. Овај задатак се решава методама инверзне интерполације. Значи ако је задато $y = y^*$ питамо се које је то $x = x^*$ за које је $f(x^*) = y^*$.

не знамо

Уколико f има инверзну функцију, решење је $x^* = f^{-1}(y^*)$.

Али ми f обично не знамо у аналитичкој форми (преко формуле), већ нам је задато таблицом.

Ако је дата функција $y = f(x)$ (тј. њена таблица) монотона, задатак инверзне интерполације најједноставније се решава међусобном заменом вредности функције и аргумента, тј. инверзијом таблице која добија облик

$y = f(x)$	y_0	y_1	$\dots$	y_n
x	x_0	x_1	$\dots$	x_n

$(y_k = f(x_k))$

а затим конструкцијом интерполационог полинома $\tilde{P}_n(y)$.

Инверзна интерполација (2. део)

Пример 3. Одредити приближно нулу функције f која је задата таблицом

x_k	-1	0	2	3
$f(x_k)$	-1	2	10	35

Решење. $f(x)=0 \longrightarrow x=x^*=f^{-1}(0)$

значи користимо инвертовану таблицу

y_k	-1	2	10	35
x_k	-1	0	2	3

Одредимо $\tilde{P}_3(y)$ и заменимо $y=0$. Тако добијамо приближно нулу функције f:

$$x^* \approx \tilde{P}_3(0) = -0.6508. \ \square$$

Пример 4. (ово је пр. 4.2. на 85. стр. књиге, само што нам не треба Aitken-ова схема!)

Задата је функција f скупом података

x	14	17	31	35
$f(x)$	68.7	64.0	44.0	39.1

Одредити приближно $f^{-1}(54.0)$.

Решење. Таблица се инвертује.

$$f^{-1}(54.0) \approx \tilde{P}_3(54.0) = 23.6. \ \square$$

Зашто смо решење написали са једном децималом?

/Сваки ученик ради за себе – разл. ф. бирајте/

САМОСТАЛНИ РАД (упутства)

1° Узети неку функцију, нпр. $f(x)=e^x$

– Табелирати је на неком интервалу $[a,b]$.

– Наћи Лагранжеов интерполациони полином, P_n.

– Нацртати графике f и P_n на $[a,b]$, ради упоређивања.

– Увећати број чворова и наћи ново P_n (на основу нове таблице). Нацртати додатни график.

≡ Шта се дешава са повећањем чворова?

2° – Урадити нумеричке примере за инверзну интерполацију (овде за функцију $f^{-1}(x)=\ln x$).

– Ако се не сналазите са графицима, вршите поређења за неке фиксиране (конкретне вредности).

* Довољно је да испишете све руком, сликате и шаљете ми до 15.4.2020.