ИТМ – Анализа

Душан Ђукић

5. Локална својства функција више променљивих

5.1. Тејлоров полином

Нека је $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ непрекидно диференцијабилна функција и $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ тачка унутар њеног домена. Ако нам је вредност $f(A)$ позната, а треба нам вредност $f(X)$ у некој оближњој тачки $X = (x_1, \ldots, x_n)$, природно ћемо покушати да је проценимо линеарно. Овакву процену даје нам први диференцијал функције:

$$df(A) = f'_{x_1}(A)dx_1 + \cdots + f'_{x_n}(A)dx_n.$$

То у ствари значи да је

$$f(X) \approx T_1(X) = f(A) + f'_{x_1}(A) \cdot (x_1 - a_1) + f'_{x_2}(A) \cdot (x_2 - a_2) + \cdots + f'_{x_n}(A) \cdot (x_n - a_n),$$

при чему ће одступање бити сразмерно мало у односу на растојање $d(X, A)$.

Овако је функција f апроксимирана линеарном функцијом T_1, при чему се вредности и први диференцијали функција f и T_1 у тачки A, а самим тим и сви изводи првог реда, поклапају. График функције T_1 је управо тангентна раван на површ одређену функцијом f.

Што је тачка X ближа тачки A, ова апроксимација биће тачнија. Ипак, ово нам често неће бити довољно. Зато ћемо, као и у случају функција једне променљиве, боље учинити апроксимацијом функције f полиномом вишег степена.

Тејлоров полином даје једну могућност за такву апроксимацију. Као и код функција једне променљиве, то је полином

$$T_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

степена k чија се и вредност и сви изводи до k-тог реда поклапају са одговарајућим вредностима за функцију f - наравно, под претпоставком да је функција f непрекидно диференцијабилна k пута.

Тврђење 5.1. Тејлоров полином степена k за функцију f у околини тачке $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ се може записати као

$$T_k(X) = f(A) + df(A) + \frac{1}{2!}d^2 f(A) + \cdots + \frac{1}{k!}d^k f(A),$$

где је $X = (x_1, \ldots, x_n)$ и где након развоја „диференцијала” замењујемо dx_i са $x_i - a_i$.

Није тешко видети да овај полином има својство које нам треба, као и да је то једини такав полином. Самим тим, он има својство да је

$$f(X) = T_k(X) + o(h^k) \text{ када } h \to 0, \quad \text{где је} \quad h = d(X, A).$$

Другим речима: Тејлоров полином степена k је „најтачнија могућа” апроксимација функције f полиномом k-тог степена у околини тачке A.

У случају функција двеју променљивих овај израз поприма следећи облик:

Тврђење 5.2. Тејлоров полином степена n функције $f(x, y)$ у околини тачке (a, b) је

$$\begin{aligned}
T_k(x, y) = f(a, b) &+ f'_x(a, b)\cdot(x-a) + f'_y(a, b)\cdot(y-b) \\
&+ \frac{1}{2!}\left(f''_{xx}(a, b)\cdot(x-a)^2 + 2f''_{xy}(a, b)\cdot(x-a)(y-b) + f''_{yy}(a, b)\cdot(y-b)^2\right) \\
&+ \cdots \\
&+ \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-i}\partial y^i}(a, b)\cdot(x-a)^{n-i}(y-b)^i.
\end{aligned}$$

Пример 5.1. Наћи Тејлоров полином степена 2 за функцију $f(x,y)=\sqrt{1+x+xy}$ у околини тачке $(0,0)$.

Решење. Имамо
$$f'_x=\frac{1+y}{2\sqrt{1+x+xy}},\quad f'_y=\frac{x}{2\sqrt{1+x+xy}}$$
и
$$f''_{xx}=-\frac{(1+y)^2}{4(1+x+xy)^{3/2}},\quad f''_{xy}=\frac{2+x+xy}{4(1+x+xy)^{3/2}},\quad f''_{yy}=-\frac{x^2}{4(1+x+xy)^{3/2}}.$$
У тачки $(x,y)=(0,0)$ је
$$f'_x=\frac{1}{2},\quad f'_y=0,\quad f''_{xx}=-\frac{1}{4},\quad f''_{xy}=\frac{1}{2},\quad f''_{yy}=0.$$
Тако добијамо Тејлоров полином
$$T_2(x,y)=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{2}xy.$$

5.2. Тачке екстремума

Претпоставимо да непрекидно диференцијабилна функција $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ достиже свој локални екстремум (минимум или максимум) у тачки $A=(a_1,\dots,a_n)$. Тада је A тачка екстремума и по свакој промењљивој, што значи да су сви први парцијални изводи функције f једнаки нули:
$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(A)=\cdots=\frac{\partial f}{\partial x_n}(A)=0,\quad \text{тј.}\quad \operatorname{grad} f(A)=0. \tag{5.1}$$
Тачке A које имају својство (5.1) зову се *стационарне тачке*.

Другим речима: Ако је $f(x,y)$ функција по две промењљиве, њене стационарне тачке су тачке у којима је тангентна раван хоризонтална.

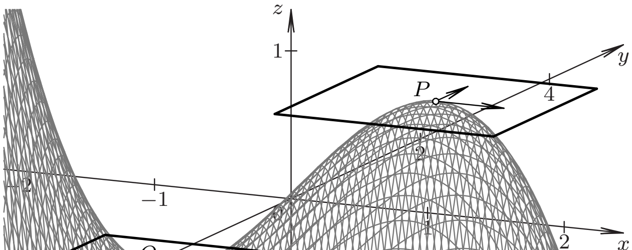
Према томе:

Тврђење 5.3. Тачка у којој функција f достиже локални екстремум може бити

(1°) њена стационарна тачка, или
(2°) тачка у којој функција f није непрекидно диференцијабилна.

С друге стране, не мора свака стационарна тачка бити тачка екстремума.

Пример 5.2. На слици је приказан график функције $f(x,y)=x+y-\frac{1}{3}x^3-4y^2$. Запажамо две стационарне тачке, $(\pm1,\frac{1}{8})$, којима одговарају тачке P и Q на графику. Тачка P је тачка локалног максимума (али не и глобалног), док тачка Q није тачка локалног екстремума.



Испитајмо под којим условима је стационарна тачка A тачка локалног екстремума. Подсетимо се да је, за X у околини тачке A, када $\vec{dx}=(dx_1,\dots,dx_n):=X-A\to 0$,
$$f(A+\vec{dx})=f(A)+\cancelto{0}{df(A)}+\frac{1}{2!}d^2f(A)+\cancelto{o(|dx|^2)}{\left(\frac{1}{3!}d^3f(A)+\frac{1}{4!}d^4f(A)+\cdots\right)}\approx f(A)+\frac{1}{2}d^2f(A).$$
Дакле, кључан нам је знак члана
$$d^2f(A)=\sum_{i,j=1}^{n}f''_{x_ix_j}(A)\,dx_i\cdot dx_j,$$
који је хомоген квадратни полином по величинама $dx_1,\dots,dx_n$. Кажемо да је тај квадратни полином

- *позитивно дефинитан* ако је $d^2 f(A) > 0$ за сваки избор величина $dx_1, \dots, dx_n$ које нису све нула;
- *негативно дефинитан* ако је $d^2 f(A) < 0$ за сваки избор величина $dx_1, \dots, dx_n$ које нису све нула.

Видимо следеће:

Тврђење 5.4. Нека је функција $f(x_1, \dots, x_n)$ непрекидно диференцијабилна у тачки A.

- ако је $d^2 f(A)$ позитивно дефинитан, онда је A тачка *локалног минимума*;
- ако је $d^2 f(A)$ негативно дефинитан, онда је A тачка *локалног максимума*;
- ако $d^2 f(A)$ мења знак, тј. ако може бити и позитивно и негативно у зависности од избора $dx_1, \dots, dx_n$, онда A *није* тачка локалног екстремума функције f.

Детаљније ћемо испитати случај две променљиве. Дакле, нека је $f(x, y)$ непрекидно диференцијабилна функција и $A(x_0, y_0)$ тачка у њеном домену. Тада је

$$d^2 f(A) = E \cdot dx^2 + 2F \cdot dxdy + G \cdot dy^2,$$

где су

$$E = f_{xx}(A), \quad F = f_{xy}(A), \quad G = f_{yy}(A). \tag{5.2}$$

Дискриминанта квадратног полинома $d^2 f(A)$ је 4Δ, где је

$$\Delta = G^2 - EF.$$

Знамо да је $d^2 f(A)$ позитивно дефинитно ако је $\Delta < 0$ и $E > 0$, а негативно дефинитно ако је $\Delta < 0$ и $E < 0$. Тако долазимо до следећег критеријума.

Тврђење 5.5. Нека је A стационарна тачка непрекидно диференцијабилне функције $f(x, y)$. Величине E, F, G и Δ су дефинисане као у (5.2).

- ако је $\Delta < 0$ и $E > 0$, онда је A тачка *локалног минимума* функције f;
- ако је $\Delta < 0$ и $E < 0$, онда је A тачка *локалног максимума* функције f;
- ако је $\Delta > 0$, онда A није тачка локалног екстремума функције f.

Пример 5.3. Наћи тачке локалних екстремума функције

$$f(x, y) = x^2 y(1 - x - y), \quad 0 < x, y < 1.$$

Решење. Имамо

$$f'_x = xy(2 - 3x - 2y) \quad \text{и} \quad f'_y = x^2(1 - x - 2y).$$

Једино решење система једначина $f'_x = f'_y = 0$, тј. једина стационарна тачка, је $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

У овој тачки је

$$\begin{aligned} E = f''_{xx} &= 2y(1 - 3x - y) &&= -3/8, \\ F = f''_{xy} &= x(2 - 3x - 4y) &&= -1/4. \\ G = f''_{yy} &= -2x^2 &&= -1/2. \end{aligned}$$

Сада је

$$\Delta = -\frac{1}{8} \quad \text{и} \quad E < 0,$$

што значи да је $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ тачка локалног максимума.

У „граничном” случају, када је $\Delta = 0$, потребно је испитати изводе вишег реда (трећег, четвртог, итд.) пошто нам изводи другог реда не дају довољно информација.

Пример 5.4. (а) Посматрајмо функцију $f(x, y) = x^4 + y^4$.

Њена једина стационарна тачка је $A(0, 0)$. У тој тачки је $df(A) = 0$, али је такође $d^2 f(A) = d^3 f(A) = 0$.

Ипак, A је тачка локалног минимума функције f јер је

$$d^4 f(A) = 24(dx^4 + dy^4)$$

строго позитивно кад год dx и dy нису оба нуле.

(б) Посматрајмо сада функцију $f(x, y) = x^3 + y^3$.

Као и у претходном случају, њена једина стационарна тачка је $A(0, 0)$. У тој тачки је $df(A) = d^2 f(A) = 0$, али A није тачка локалног екстремума јер

$$d^3 f(A) = 6(dx^3 + dy^3)$$

може да буде и позитивно и негативно.

5.3. Задаци

1. Наћи Тејлоров полином реда 2 за функцију $f(x,y) = \frac{1}{2x+y+xy}$ у тачки $(x,y) = (1,1)$.
2. Наћи Маклоренов полином реда 3 за функцију $f(x,y) = (1+x^2+2y^2)e^{-xy}$.
3. Наћи Маклоренов полином реда 3 за функцију $y(x)$ имплицитно дату једначином $y+\sin y = 2x$.
4. Наћи Маклоренов полином реда 2 за функцију $z(x,y)$ дату једначином $e^z + xz = y+1$.
5. Наћи тачке локалних екстремума функције $f(x,y) = x^2+2xy+y^3-6x-7y$.
6. Наћи тачке локалних екстремума функције $f(x,y) = x+\frac{y}{x}+\frac{8}{y}$, $xy \neq 0$.
7. Наћи тачке локалних екстремума функције $f(x,y) = \cos x + \cos y - \cos(x+y)$ за $x,y \in (0,2\pi)$.
8. Наћи тачке локалних екстремума функције $f(x,y) = \frac{x+y+1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$.

5.4. Решења

1. Имамо $f(1,1) = \frac{1}{4}$. Даље, парцијални изводи у тачки $A(1,1)$ су

$$f'_x = -\frac{y+2}{(xy+2x+y)^2} = -\frac{3}{16}, \quad f'_y = -\frac{x+1}{(xy+2x+y)^2} = -\frac{1}{8},$$
$$f''_{xx} = \frac{2(y+2)^2}{(xy+2x+y)^3} = \frac{9}{32}, \quad f''_{xy} = \frac{xy+2x+y+4}{(xy+2x+y)^3} = \frac{1}{8}, \quad f''_{yy} = \frac{2(x+1)^2}{(xy+2x+y)^3} = \frac{1}{8}.$$

Следи да је Тејлоров полином $T_2(x,y) = \frac{1}{4} - \frac{3}{16}(x-1) - \frac{1}{8}(y-1) + \frac{9}{64}(x-1)^2 + \frac{1}{8}(x-1)(y-1) + \frac{1}{16}(y-1)^2$.

2. Овде ћемо развити функцију e^{-xy} у Маклоренов ред *као функцију једне променљиве*, а потом добијени полином помножити са $1+x^2+2y^2$. Наиме, знамо да је $e^t = 1+t+\frac{1}{2}t^2+O(t^3)$, па за $t = -xy$ добијамо

$$e^{-xy} = 1 - xy + \frac{1}{2}x^2y^2 + \cdots = 1 - xy + R(x,y),$$

где су сви сабирци у $R(x,y)$ степена бар 4. Одавде је $f(x,y) = (1+x^2+2y^2)(1-xy+R(x,y)) = 1+x^2+2y^2-xy+S(x,y)$, где су сви сабирци у $S(x,y)$ степена бар 4.

Према томе, тражени Маклоренов полином је $T_3(x,y) = 1+x^2-xy+2y^2$.

3. Јасно је да је $y(0) = 0$. Означимо $f(x,y) = y+\sin y - 2x$. Имамо $y' = y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} = \frac{2}{1+\cos y}$. Даље диференцирамо y' као сложену функцију:

$$y'' = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2}{1+\cos y}\right) = \frac{2\sin y}{(1+\cos y)^2}\cdot y' = \frac{4\sin y}{(1+\cos y)^3},$$
$$y''' = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{4\sin y}{(1+\cos y)^3}\right) = \frac{4(3-2\cos y)}{(1+\cos y)^3}\cdot y' = \frac{8(3-2\cos y)}{(1+\cos y)^4}.$$

У тачки $x=0$ је $y' = 1$, $y'' = 0$ и $y''' = \frac{1}{2}$, па је Маклоренов полином $T_3(x) = x + \frac{1}{12}x^3$.

4. За $x=y=0$ је $e^z = 1$, тј. $z = 0$. Означимо $f(x,y,z) = e^z + xz - y - 1 = 0$. Тада је $z'_x = -\frac{f'_x}{f'_z} = \frac{-z}{e^z+x}$ и $z'_y = -\frac{f'_y}{f'_z} = \frac{1}{e^z+x}$. Имајући у виду ове изразе, даље добијамо

$$z''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-z}{e^z+x}\right) = \frac{-z'_x(e^z+x)+z(e^z z'_x+1)}{(e^z+x)^2} = \frac{2z(e^z+x)-z^2e^z}{(e^z+x)^3}.$$

Слично је

$$z''_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{e^z+x}\right) = \frac{-e^z z'_x - 1}{(e^z+x)^2} = \frac{(z-1)e^z - x}{(e^z+x)^3} \quad \text{и} \quad z''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{e^z+x}\right) = \frac{-e^z z'_y}{(e^z+x)^2} = \frac{-e^z}{(e^z+x)^3}.$$

У тачки $(0,0)$ добијамо $z'_x = 0$, $z'_y = 1$, $z''_{xx} = 0$, $z''_{xy} = -1$ и $z''_{yy} = -1$. Према томе, тражени Маклоренов полином је $T_2(x,y) = y - xy - \frac{1}{2}y^2$.

5. Имамо $f'_x = 2x+2y-6$ и $f'_y = 2x+3y^2-7$. Ако је $f'_x = f'_y = 0$, онда је $y = 3-x$ и $f'_y = 3x^2-16x+20 = 0$, одакле је $x \in \{2, \frac{10}{3}\}$. Према томе, једине стационарне тачке (x,y) су $M_1(2,1)$ и $M_2(\frac{10}{3}, -\frac{1}{3})$.

Даље, пошто је $E = f''_{xx} = 2$, $F = f''_{xy} = 2$, $G = f''_{yy} = 6y$ и $\Delta = F^2 - EG = 4(1-3y)$, добијамо $\Delta < 0$ у тачки M_1 и $\Delta > 0$ у тачки M_2, што значи да је M_1 тачка локалног екстремума (и то минимума јер је $E > 0$), док M_2 то није.

6. Стационарне тачке налазимо решавањем система $f'_x = 1 - \frac{y}{x^2} = 0$ и $f'_y = \frac{1}{x} - \frac{8}{y^2} = 0$: добијамо $y = x^2$ и $x = \frac{1}{8}y^2 = \frac{1}{8}x^4$, па је $x^3 = 8$, тј. $x = 2$ и одатле $y = 4$. Даље је $f''_{xx} = \frac{2y}{x^3}$, $f''_{xy} = -\frac{1}{x^2}$, $f''_{yy} = \frac{16}{y^3}$, па за $(x,y) = (2,4)$ имамо $\Delta = \frac{1}{x^4} - \frac{32}{x^3y^2} = -\frac{3}{16} < 0$. Како је $f''_{xx} > 0$, тачка $(x,y) = (2,4)$ је тачка локалног минимума.

7. Први парцијални изводи су $f'_x = \sin(x+y) - \sin x = 2\sin\frac{y}{2}\cos(x+\frac{y}{2})$ и $f'_y = \sin(x+y) - \sin y = 2\sin\frac{x}{2}\cos(y+\frac{x}{2})$. Нека је $f'_x = f'_y = 0$, тј. $\sin x = \sin y = \sin(x+y)$.

   (i) Ако је $y = x$, онда из $f'_x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2} = 0$ (због $\sin\frac{x}{2} \neq 0$ за $0 < x < 2\pi$) следи $x \in \{\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}\}$.

   (ii) Остаје случај $y = \pi - x$. Тада из $f'_x = f'_y = 0$ следи $\sin x = \sin y = 0$, па је $x = y = \pi$ - тачка коју смо већ нашли.

   Други парцијални изводи функције f су $f''_{xx} = \cos(x+y) - \cos x$, $f''_{xy} = \cos(x+y)$ и $f''_{yy} = \cos(x+y) - \cos y$. За $(x,y) = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ или $(\frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$ биће $\Delta = (\frac{1}{2})^2 - (-1)(-1) = -\frac{3}{4} < 0$ и $f''_{xx} < 0$, па овде имамо локални максимум. За $(x,y) = (\pi,\pi)$ је $\Delta = 1^2 - 2\cdot 2 = -3 < 0$ и $f''_{xx} > 0$, па овде имамо локални минимум.

8. Први и други парцијални изводи су

$$f'_x = \frac{y^2-xy-x+1}{(x^2+y^2+1)^{3/2}}, \quad f'_y = \frac{x^2-xy-y+1}{(x^2+y^2+1)^{3/2}},$$

$$f''_{xx} = \frac{2x^2(y+1)-(3x+y+1)(y^2+1)}{(x^2+y^2+1)^{5/2}}, \quad f''_{xy} = \frac{-x^3+2x^2y+2xy^2-y^3+3xy-x-y}{(x^2+y^2+1)^{5/2}}, \quad f''_{yy} = \frac{2y^2(x+1)-(3y+x+1)(x^2+1)}{(x^2+y^2+1)^{5/2}}.$$

   Ако је $f'_x = f'_y = 0$, онда је $x^2+y^2+1-x(x+y+1) = x^2+y^2+1-y(x+y+1)$, па како је $x^2+y^2+1 \neq 0$, мора бити $x = y$ и одатле $(x,y) = (1,1)$. У овој тачки је $f''_{xx} = f''_{yy} = \frac{-2}{3\sqrt{3}} < 0$, $f''_{xy} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ и $\Delta = -\frac{1}{9} < 0$, што значи да је то тачка локалног максимума.