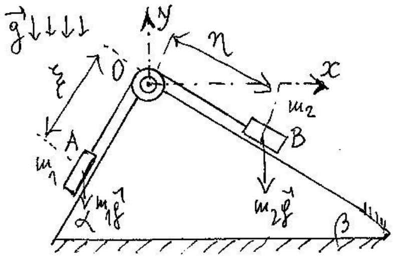


NERASTEGLJIVO UŽE ZANEMARLJIVE MASE SPAJA TERETE A (MASE m_1) i B (MASE m_2) KOJI SE MOGU KRETATI PO GLATKIM STRMIM RAVNIMA α i β. ODREDITI UBRZANJE TERETA B. SISTEM JE U VERTIKALNOJ RAVNI.

ZADATAK REŠAVAMO U ODNOSU NA INERCIJALNI SISTEM Oxy.

① PRVO ODREĐUJEMO BROJ STEPENI SLOBODE KRETANJA. AKO NA SISTEM OD "n" TAČAKA (MASENIH) DEJSTVUJE "k" HOLONOMNIH (GEOMETRIJSKIH) VEZA, TADA JE $S=3n-k$ MEĐUSOBNO NEZAVISNIH (GENERALISANIH) KOORDINATA I KAŽEMO DA DATI SISTEM IMA "S" STEPENI SLOBODE KRETANJA.
U NAŠEM ZADATKU TELA A i B TRANSLIRAJU i MOGU BITI TRETIRANI KAO "TAČKE".
SVAKA TAČKA IMA "TRI" STEPENA SLOBODE KRETANJA. TREBALO BI "$3(2)=6$" DA OVDE IMAMO 6 STEPENI SLOBODE; MEĐUTIM KAKO POSTOJE i "PET" HOLONOMNIH VEZA SLEDI "1"$=3(2)-5$ DA U NAŠEM ZADATKU IMAMO "1" STEPEN SLOBODE KRETANJA T.J. "JEDNU" GENERALISANU KOORDINATU KOJA JEDNOZNAČNO OPISUJE POLOŽAJ SISTEMA U ODNOSU NA INERCIJALNI SISTEM. NEKA JE TO "q_1"$=\eta$.

JEDNAČINE VEZA SU: 1) $z_A=0$ 2) $z_B=0$ 3) $\xi+\eta=l$

4) $tg\alpha=\frac{y_A}{x_A}$ 5) $tg\beta=\frac{y_B}{x_B}$

② POŠTO SISTEM IMA "1" STEPEN SLOBODE, KOORDINATE (DEKARTOVE) x_A, y_A, x_B, y_B NISU MEĐUSOBNO NEZAVISNE; ZATO UVEK PRVO TREBA NAPISATI (ODREDITI) KAKO TE KOORDINATE ZAVISE (KAKVA SU FUNKCIJA) OD GENERALISANE KOORDINATE: $x_B=\eta\cos\beta$ $y_B=-\eta\sin\beta$ $x_A=-(l-\eta)\cos\alpha$ $y_A=-(l-\eta)\sin\alpha$

③ KINETIČKA ENERGIJA SISTEMA: $T=\frac{1}{2}m_1 V_A^2+\frac{1}{2}mV_B^2$ ODREDIMO TE APSOLUTNE BRZINE:

$$\begin{cases}\dot x_A=\dot\eta\cos\alpha\\ \dot y_A=\dot\eta\sin\alpha\end{cases} \Rightarrow V_A^2=(\dot\eta\cos\alpha)^2+(\dot\eta\sin\alpha)^2 \quad V_A^2=\dot\eta^2$$

SLIČNO $V_B^2=\dot\eta^2$ PA JE $\boxed{T=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot\eta^2}$

U OPŠTEM SLUČAJU (KOD HOLONOMNIH, STACIONARNIH, VEZA) KOD "1" S.S.K $\Rightarrow T(\dot\eta,\eta)$; POŠTO SU NAŠE KINEMATSKE VEZE BILE JEDNOSTAVNE KOD NAS JE $T(\dot\eta)$.

④ RAD SILA NA MOGUĆEM POMERANJU/ODREĐIVANJE GENERALISANE SILE:

$$\delta A=m_1\vec g\cdot\delta\vec r_A+m_2\vec g\cdot\delta\vec r_B \quad \delta A=-m_1 g\delta y_A-m_2 g\delta y_B \quad \delta A=-m_1 g\delta[-(l-\eta)\sin\alpha]-m_2 g\delta[-\eta\sin\beta]$$

$$\delta A=-m_1 g\sin\alpha\,\delta\eta+m_2 g\sin\beta\,\delta\eta$$

$$\delta A=[(m_2\sin\beta-m_1\sin\alpha)g]\delta\eta \quad \Rightarrow \quad Q_\eta=\left(\frac{\delta A}{\delta\eta}\right)=(m_2\sin\beta-m_1\sin\alpha)g$$

⑤ LAGRANŽEVA DIF. JED. DRUGE VRSTE: $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\eta}-\cancelto{0}{\frac{\partial T}{\partial\eta}}=Q_\eta$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot\eta}=(m_1+m_2)\dot\eta \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\eta}=(m_1+m_2)\ddot\eta \qquad \frac{\partial T}{\partial\eta}=0$$

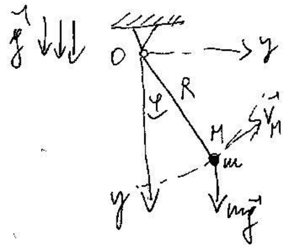
$$(m_1+m_2)\ddot\eta=(m_2\sin\beta-m_1\sin\alpha)g$$

T.J. $a_B=\ddot\eta=\frac{(m_2\sin\beta-m_1\sin\alpha)}{(m_1+m_2)}g$

$\boxed{\text{NAPOMENA}}$: AKO SISTEM IMA VIŠE STEPENI SLOBODE KRETANJA, ZA SVAKI STEPEN SLOBODE T.J. ZA SVAKU GENERALISANU KOORDINATU FORMIRAMO NJENU DIF. JED. $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot q_\alpha}-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}=Q_\alpha$ $(\alpha=1,2,\dots)$

POŠTO JE RAD SILA IDEALNIH VEZA "NULA", NEMORAMO IH PRIKAZIVATI.
BROJ STEPENI SLOBODE SE MOŽE ODREĐIVATI I METODOM "ZAMRZAVANJA KRETANJA".

Novi "formalizam" (ove Lagranževe jednačine druge vrste) najlakše je savladati ako ga primenite na one modele (zadatke) koje ste već rešili nekim drugim metodama.
Na primer matematičko klatno (već smo rešili iz drugog aksioma, ili Lagranževih jednačina prve vrste – sa množiocem veza ili vektorskim teoremama).



Jedan stepen slobode kretanja, uzimali smo $q_1 = \varphi$. Holonomna veza.
Ovaj Lagranžev metod traži da se odrede:

1) kinetička energija $T(\dot\varphi, \varphi)$
2) generalisana sila Q_φ

$$T = \frac{1}{2} m V_M^2 = \frac{1}{2} m (R\dot\varphi)^2 = \left(\frac{1}{2} mR^2\right)\dot\varphi^2$$

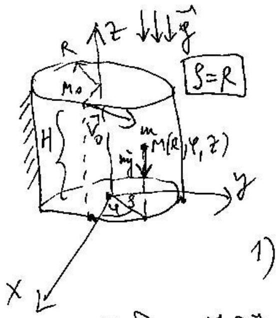
$$\left[\begin{array}{l} \delta A = m\vec{g}\cdot\delta\vec{r}_M = mg\,\delta(R\cos\varphi) = -mgR\sin\varphi\,\delta\varphi \\ Q_\varphi = \frac{\delta}{\delta\varphi}(A) = -mgR\sin\varphi \end{array}\right.$$

L. dif. jed. II vrste:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial\dot\varphi} = mR^2\dot\varphi \quad \frac{\partial T}{\partial\varphi} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi}\right) = mR^2\ddot\varphi \end{array}\right\} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi} - \cancel{\frac{\partial T}{\partial\varphi}}^{0} = Q_\varphi \quad \Rightarrow \quad mR^2\ddot\varphi = -mgR\sin\varphi \quad \boxed{\ddot\varphi + \left(\frac{g}{R}\right)\sin\varphi = 0}$$

T.j. u linearnom slučaju $\ddot\varphi + \left(\frac{g}{R}\right)\varphi = 0$

* * *



Ili primer materijalne tačke koja se u homogenom polju sile zemljine teže kreće po površi cilindra (pronaći tekst zadatka u sveskama).
Veza je idealna, holonomna, zadržavajuća, stacionarna.
Sistem ima dva stepena slobode kretanja, uzimali smo $\left\{\begin{array}{l} q_1 = \varphi \\ q_2 = z \end{array}\right.$

1) $T = \frac{1}{2} m V_M^2 = \frac{1}{2} m (R^2\dot\varphi^2 + \dot z^2)$

2) $\delta A = m\vec{g}\cdot\delta\vec{r}_M = -mg\,\delta z + (0)\,\delta\varphi$ $\quad \left\{\begin{array}{l} Q_\varphi = \left[\frac{\delta}{\delta\varphi}(A)\right]_{\delta z \neq 0} = 0 \\ Q_z = \left[\frac{\delta}{\delta z}(A)\right]_{\delta\varphi \neq 0} = -mg \end{array}\right.$

$$\begin{array}{ll} x_M = R\cos\varphi & \dot x_M = -R\dot\varphi\sin\varphi \\ y_M = R\sin\varphi & \dot y_M = R\dot\varphi\cos\varphi \\ z_M = z & \dot z_M = \dot z \end{array}$$

$$V_M^2 = \cancel{\dot\rho^2}^{0} + (\rho\dot\varphi)^2 + \dot z^2 = (R\dot\varphi)^2 + \dot z^2$$

L. dif. jed. II vrste:

$$(*)\left\{\begin{array}{l} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi} - \cancel{\frac{\partial T}{\partial\varphi}}^{0} = \cancel{Q_\varphi}^{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial\dot\varphi} = C \quad mR^2\dot\varphi = mR^2\dot\varphi_0 \quad \dot\varphi = \dot\varphi_0 \quad \dot\varphi = \frac{v_0}{R} \quad \varphi = \frac{v_0}{R}t \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot z} - \cancel{\frac{\partial T}{\partial z}}^{0} = Q_z \quad\quad m\ddot z = -mg \quad \dot z = -gt + \cancel{C_1}^{0} \quad z = -\frac{gt^2}{2} + \underset{H}{C_2} \end{array}\right.$$

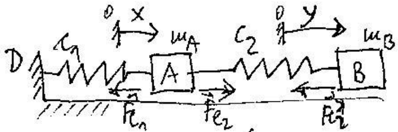
$$\left[\begin{array}{lll} \frac{\partial T}{\partial\dot\varphi} = mR^2\dot\varphi & \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi} = mR^2\ddot\varphi & \frac{\partial T}{\partial\varphi} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial\dot z} = m\dot z & \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot z} = m\ddot z & \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\left\{\rho = R,\ \varphi = \frac{v_0}{R}t,\ z = -g\frac{t^2}{2} + H\right\}}_{\text{(polarno-cilindrični sistem)}} \quad \text{ili} \quad \underbrace{\left\{x_M = R\cos\left(\frac{v_0}{R}t\right);\ y_M = R\sin\left(\frac{v_0}{R}t\right) \quad z_M = -\frac{gt^2}{2} + H\right\}}_{\text{(Dekartov sistem)}}$$

Polazeći od Njutnovog drugog aksioma za sistem od "N" tačaka (masenih) t.j. preći od (3N) koordinata tačaka na sistem sa (S) stepeni slobode (!)

$\boxed{\text{NAPOMENA}}$: Veze su idealne, rad tih reakcija veza na mogućim pomeranju je "nula".

Kada se iz sistema dif. jednačina (*) nađu generalisana ubrzanja $\ddot q_\alpha(\dot q, q, t)$ mogu se reakcije veza odrediti iz Lagranževih dif. jed. prve vrste (sa množiocima veza $\lambda\,\mathrm{grad} f$). Sistem (*) je zatvoren sistem i može se, u principu, rešiti. Košijevo rešenje $q_\alpha(t; t_0, q_{\alpha(0)}, \dot q_{\alpha(0)})$ sistema [naših (*)] određuje kretanje sistema t.j. određuje diferencijabilnu krivu na "konfiguracionoj mnogostrukosti". $\boxed{\text{UKRATKO}}$: Lag. dif. jed. II vrste su optimalne kada u nekom sistemu treba odrediti "sama kretanja" $q_\alpha(t; t_0, q_{\alpha(0)}, \dot q_{\alpha(0)})$; tu sposobnost mu daju generalisane koordinate kojih ima onoliko koliko ima stepeni slobode kretanja kod holonomnih veza.



ODREDIMO LAG. DIF. JED. II VRSTE ZA LINISKI LANČANI SISTEM SA DVA STEPENA SLOBODE KRETANJA: $q_1 = x$, $q_2 = y$.

TERETI SE KREĆU PO GLATKOJ HORIZONTALNOJ VEZI; MASE SU IM m_A, m_B. OPRUGA $\overline{DA}$ JE KRUTOSTI c_1; OPRUGA $\overline{AB}$ JE KRUTOSTI c_2. KADA JE $x=0, y=0$ OPRUGE SU NENAPREGNUTE.

$$T = \frac{1}{2} m_A V_A^2 + \frac{1}{2} m_B V_B^2 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2} m_A \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_B \dot{y}^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m_A \dot{x}; \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m_A \ddot{x}; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m_B \dot{y}; \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m_B \ddot{y}; \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

$$F_{e_1} = c_1 x_1 \qquad F_{e_2} = c_2 (y - x)$$

$$\delta A = \underbrace{-c_1 x \,\delta x + c_2 (y-x)\,\delta x}_{(\delta x \neq 0 \ \ \delta y = 0)} \underbrace{- c_2 (y-x)\,\delta y}_{(\delta x = 0 \ \ \delta y \neq 0)}$$

$$(*) \quad \delta A = \left[-c_1 x + c_2 (y-x)\right]\delta x - \left[c_2 (y-x)\right]\delta y \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} Q_x = -c_1 x + c_2 (y-x) \\ Q_y = -c_2 (y-x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \cancelto{0}{\dfrac{\partial T}{\partial x}} = Q_x \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \cancelto{0}{\dfrac{\partial T}{\partial y}} = Q_y \end{cases} \qquad \begin{cases} m_A \ddot{x} = -c_1 x + c_2 (y-x) \\ m_B \ddot{y} = -c_2 (y-x) \end{cases} \qquad \text{T.J.} \begin{cases} \ddot{x} + \left(\dfrac{c_1}{m_A}\right)x - \left(\dfrac{c_2}{m_2}\right)(y-x) = 0 \\ \ddot{y} + \left(\dfrac{c_2}{m_B}\right)(y-x) = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{NAPOMENA}}$: OPRUGE NE PREDSTAVLJAJU VEZU; ONE SU IZVOR SILE (ELASTIČNE) KOJA DEJSTVUJE NA SISTEM. POMERANJA δx I δy SU NEZAVISNA MEĐUSOBNO. PRVO SMO SISTEMU ZADALI MOGUĆE POMERANJE $\delta x \neq 0$ $(\delta y = 0)$ RAD SU STVARALE SILE $\vec{F}_{e_1}$ I $\vec{F}_{e_2}$; ZATIM SMO ZADALI MOGUĆE POMERANJE $\delta y \neq 0$ $(\delta x = 0)$ RAD STVARA SAMO SILA $\vec{F}_{e_2}^{\,1}$.

MOGLI SMO DO RADA NA MOGUĆEM POMERANJU I GENERALISANIH SILA DOĆI I NA DRUGI NAČIN POMOĆU POZNATIH (IZVELI SMO TE OBRASCE) OBRAZACA ZA RAD:

$$A_{M_1 M_2} = \frac{c}{2}\Delta \ell_{poč}^2 - \frac{c}{2}\Delta \ell_{kraj}^2 \quad (\text{U NAŠEM PROBLEMU } \Delta \ell_{poč} = 0)$$

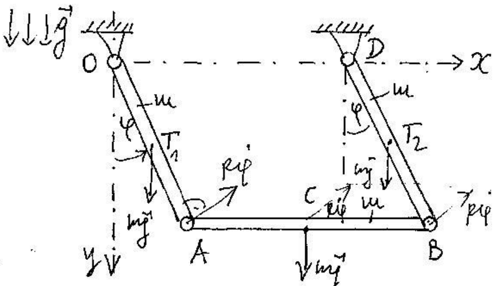
ZA OPRUGU $\overline{AB}$ $\quad A(\vec{F}_{e_2}) = -\dfrac{c_2}{2}(y-x)^2 \Big/ \underbrace{\delta}_{\text{VARIRAJMO}} \quad \Rightarrow \quad \delta A(\vec{F}_{e_2}) = -c_2 (y-x)\,\delta(y-x)$

$$\delta A(\vec{F}_{e_2}) = -c_2 (y-x)\,\delta y + c_2 (y-x)\,\delta x$$

ZA OPRUGU $\overline{DA}$ $\quad A(\vec{F}_{e_1}) = -\dfrac{c_1}{2}x^2 \Big/ \delta \quad \Rightarrow \quad \delta A(\vec{F}_{e_1}) = -c_1 x\,\delta x$

$$\delta A = \delta A(\vec{F}_{e_1}) + \delta A(\vec{F}_{e_2}) = -c_1 x\,\delta x - c_2 (y-x)\,\delta y + c_2 (y-x)\,\delta x \quad \text{T.J. } (*).$$

PRIMER KOJI SLEDI ILUSTRUJE "JEDNOSTAVNOST" SA KOJOM TEOREMA O PROMENI KINETIČKE ENERGIJE I IZ NJE IZVEDENE LAGRANŽEVE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE DRUGE VRSTE REŠAVAJU PROBLEM "KRETANJA".



ODREDITI LAG. DIF. JED. II VRSTE ZA GENERALISANU KOORDINATU $q_1=\varphi$. ŠTAPOVI SU MASE (SVAKI) m I DUŽINE R. SISTEM JE U VERTIKALNOJ RAVNI. U TAČKAMA O, D, A, B SU ZGLOBNE VEZE. U $t_0=0$ SISTEM JE MIROVAO A $\varphi(0)=\varphi_0$.

VEZE SU HOLONOMNE I IDEALNE; ZBOG KRITERIJUMA IDEALNOSTI RAD, TIH IDEALNIH REAKCIJA VEZA, NA MOGUĆEM POMERANJU $\delta\varphi$ JE "NULA", TAKO DA RAD VRŠE SAMO TEŽINE ŠTAPA (T.J. SILE ZEMLJINE TEŽE).

$$\delta A = m\vec{g}\cdot\delta\vec{r}_{T_1} + m\vec{g}\cdot\delta\vec{r}_{T_2} + m\vec{g}\cdot\delta\vec{r}_C \qquad \delta A = mg\delta y_{T_1} + mg\delta y_{T_2} + mg\delta y_C$$

$$\left\{\begin{array}{l} y_{T_1}=y_{T_2}=\frac{R}{2}\cos\varphi \\ y_C = R\cos\varphi \\ \delta y_{T_1} = -\frac{R}{2}\sin\varphi\,\delta\varphi \\ \delta y_C = -R\sin\varphi\,\delta\varphi \end{array}\right.$$

$$\delta A = mg\left(-\frac{R}{2}\sin\varphi\delta\varphi\right) + mg\left(-\frac{R}{2}\sin\varphi\delta\varphi\right) + mg(-R\sin\varphi\,\delta\varphi) = -2mgR\sin\varphi\,\delta\varphi$$

$$\boxed{Q_\varphi = \frac{\delta}{\delta\varphi}(A) = -2mgR\sin\varphi}$$

$$T = T_{OA} + T_{BD} + T_{AB}$$

$$\underbrace{T_{OA}}_{\text{ROTACIJA OKO NEPOMIČNE OSE } Oz} = \frac{1}{2}J_{Oz}\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}mR^2\right)\dot{\varphi}^2 = \left(\frac{mR^2}{6}\right)\dot{\varphi}^2 \quad (\text{slično}) \; T_{BD} = \left(\frac{mR^2}{6}\right)\dot{\varphi}^2$$

$$\underbrace{T_{AB}}_{\text{TRANSLACIJA (KRIVINA)}} = \frac{1}{2}mV_C^2 = \frac{1}{2}m(R\dot{\varphi})^2 = \left(\frac{1}{2}mR^2\right)\dot{\varphi}^2$$

$$\boxed{T = \left(\frac{5}{6}mR^2\right)\dot{\varphi}^2} \qquad \frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{5}{3}mR^2\dot{\varphi} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{5}{3}mR^2\ddot{\varphi} \qquad \frac{\partial T}{\partial\varphi} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} - \underbrace{\cancel{\frac{\partial T}{\partial\varphi}}}_{0} = Q_\varphi \qquad \frac{5}{3}mR^2\ddot{\varphi} = -2mg\sin\varphi \qquad \ddot{\varphi} + \left(\frac{6}{5}\frac{g}{R}\right)\sin\varphi = 0$$

U LINEARNOM SLUČAJU $(\sin\varphi \approx \varphi)$ $\boxed{\ddot{\varphi} + \left(\frac{6}{5}\frac{g}{R}\right)\varphi = 0}$

DODATAK: ODREDIMO ZA DATE POČETNE USLOVE I KONAČNU JEDNAČINU KRETANJA U LINEARNOM SLUČAJU.

$$\left.\begin{array}{l} \varphi = C_1\cos\left(\sqrt{\frac{6g}{5R}}t\right) + \underbrace{C_2}_{0}\sin\left(\sqrt{\frac{6g}{5R}}t\right) \\ \varphi(0)=\varphi_0 \qquad \dot{\varphi}(0)=0 \end{array}\right] \Rightarrow \quad \varphi = \varphi_0\cos\left(\sqrt{\frac{6g}{5R}}t\right)$$

NAPOMENA: POKAZALI SMO DA OVO FIZIČKO KLATNO U LINEARNOM SLUČAJU VRŠI HARMONIJSKO OSCILOVANJE; OKO KOG "POLOŽAJA"? OKO ONOGA GDE POTENCIJALNA ENERGIJA IMA STROGI MINIMUM.
POLJE SILA JE KONZERVATIVNO, AKO POSTOJI FUNKCIJA $\Pi(x,y,z)$ ZAVISNA OD KOORDINATA, TAKVA DA JE $\vec{F} = -\operatorname{grad}\Pi$. ELEMENTARNI RAD KONZERVATIVNE SILE (A TO SU "SILA ZEMLJINE TEŽE", "ELASTIČNA SILA"...) $d'A = \vec{F}\cdot d\vec{r} = -d\Pi = dA$ OČEVIDNO PREDSTAVLJA TOTALNI DIFERENCIJAL FUNKCIJE $\Pi(x,y,z)$ SA PROMENJENIM ZNAKOM $A_{MM_0} = -\int_M^{M_0} d\Pi$; TADA JE $Q_\varphi = -\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi}$.

$$\left[\begin{array}{l} \Pi' = 2mgR\sin\varphi \\ \Pi'' = 2mgR\cos\varphi \end{array}\right]$$

U NAŠEM PRIMERU $\Pi = +2mgR(1-\cos\varphi)$ $\quad \underbrace{\Pi'_{\varphi_*} = 0}_{\text{POTREBAN USLOV ZA min } \Pi} \; (\text{T.J. } Q_\varphi = 0) \quad \underbrace{\Pi''_{\varphi_*} > 0}_{\text{DOVOLJAN USLOV min } \Pi}$

$\sin\varphi = 0$
- $\varphi_0 = 0$ $\quad \Pi \xrightarrow[\varphi_0]{\text{(STROGI)}} \min$ POLOŽAJ RAVNOTEŽE OKO KOGA KLATNO OSCILUJE!
- $\varphi_1 = \pi$ $\quad \Pi \xrightarrow[\varphi_1]{} \max$ POLOŽAJ NESTABILNE RAVNOTEŽE (OKO NJEGA KLATNO NE MOŽE DA OSCILUJE)!