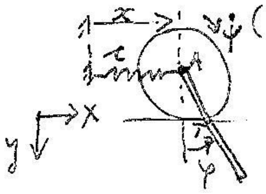
Za središte A diska mase M=2m i poluprečnika r, koji se kotrlja bez klizanja po horizontalnoj ravni, zglobno je vezan štap AB dužine 2R i mase m. Disk A je u svom centru horizontalnom oprugom krutosti c vezan za vertikalni zid. Za date generalisane koordinate x, φ odrediti: diferencijalne jednačine kretanja. Kada je x=0 opruga je ne deformisana.

ZADATAK .



(I GRUPA: $M=2m$) (II GRUPA: $M=3m$)

$$T=\frac{M}{2}V_A^2+\frac{1}{2}J_{Az}\dot{\psi}^2+\frac{1}{2}mV_T^2+\frac{1}{2}J_{Tz}\dot{\varphi}^2 \qquad J_{Az}=\frac{1}{2}Mr^2$$

$$V_A=\dot{x} \qquad \dot{\psi}=\frac{\dot{x}}{r} \qquad V_T^2=\dot{x}_T^2+\dot{y}_T^2 \qquad J_{Tz}=\frac{mR^2}{3}$$

$$\begin{cases} x_T = x + R\sin\varphi \\ y_T = R\cos\varphi \end{cases}$$

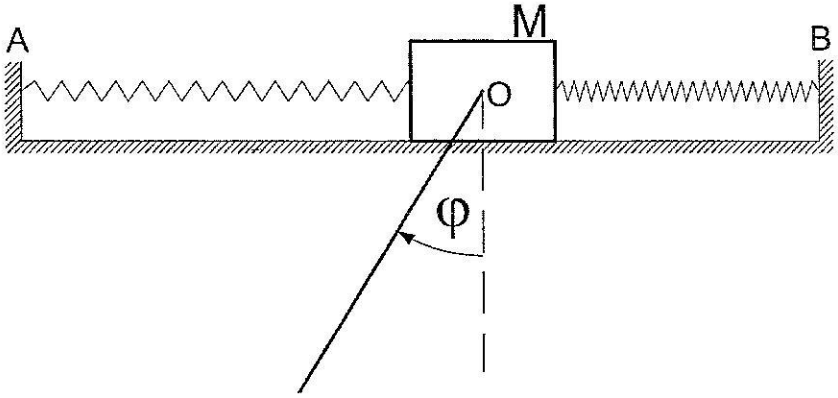
$$V_T^2=\dot{x}^2+2R\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi+R^2\dot{\varphi}^2$$

$$T=\frac{1}{4}(3M+2m)\dot{x}^2+mR\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi+\frac{2}{3}mR^2\dot{\varphi}^2$$

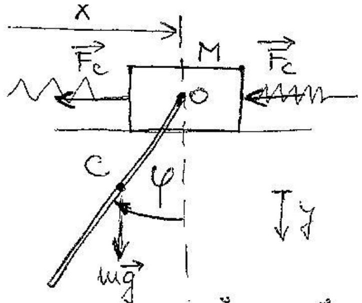
$$\delta A=-cx\,\delta x+mg\,\delta y_T \qquad Q_x=-cx \qquad Q_\varphi=-mgR\sin\varphi$$

$$\begin{cases} (3M+2m)\ddot{x}+2mR\ddot{\varphi}\cos\varphi-2mR\dot{\varphi}^2\sin\varphi-2cx=0 \\ 4R\ddot{\varphi}+3\ddot{x}\cos\varphi+3g\sin\varphi=0 \end{cases}$$

3. Telo *M*, mase *2m*, može da se kreće po glatkoj horizontalnoj ravni (slika 3). Pomoću opruga istih krutosti c telo je vezano za nepokretnu podlogu u tačkama *A* i *B*, pri čemu je $\overline{AB}=2l$. Za središte tela *O* zglobno je vezan štap dužine l i mase *m*. Za date generalisane koordinate x, φ odrediti diferencijalne jednačine kretanja. Kada je $x=l$, opruge su nedeformisane.



(3) (I пр.)



M : 2m

штап : m, l

$\overline{AB} = 2l$

$x_0 = l$ опруга ненапрегнута

$x_C = x - \frac{l}{2}\sin\varphi$

$y_C = \frac{l}{2}\cos\varphi$

$J_{Cz} = \frac{ml^2}{12}$

$E_K = E_{K1} + E_{K2}$

$E_K = \frac{1}{2}2m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mV_C^2 + \frac{1}{2}J_{Cz}\dot{\varphi}^2$

$\dot{x}_C = \dot{x} - \frac{l}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi$, $\dot{y}_C = -\frac{l}{2}\dot{\varphi}\sin\varphi$

$V_C^2 = \left(\dot{x} - \frac{l}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi\right)^2 + \left(-\frac{l}{2}\dot{\varphi}\sin\varphi\right)^2$

$V_C^2 = \dot{x}^2 - l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + \frac{l^2}{4}\dot{\varphi}^2$

$$\boxed{E_K = \frac{3}{2}m\dot{x}^2 - \frac{ml}{2}\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + \frac{ml^2}{6}\dot{\varphi}^2}$$

$\frac{\partial E_K}{\partial \dot{x}} = 3m\dot{x} - \frac{ml}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{x}}\right) = 3m\ddot{x} - \frac{ml}{2}\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right)$

$\frac{\partial E_K}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial E_K}{\partial \dot{\varphi}} = -\frac{ml}{2}\dot{x}\cos\varphi + \frac{ml^2}{3}\dot{\varphi}$

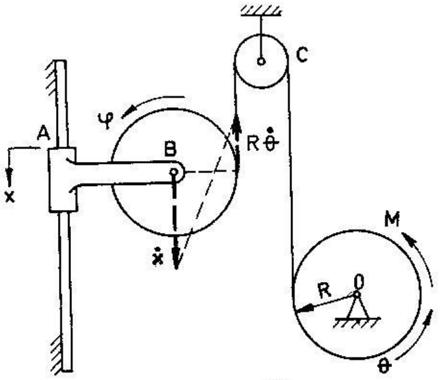
$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{\varphi}}\right) = -\frac{ml}{2}\left(\ddot{x}\cos\varphi - \dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi\right) + \frac{ml^2}{3}\ddot{\varphi}$

$\frac{\partial E_K}{\partial \varphi} = \frac{ml}{2}\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi$, $Q_x = -2c(x-l)$, $Q_\varphi = -\frac{mgl}{2}\sin\varphi$

$$\boxed{\begin{aligned} &3m\ddot{x} - \frac{ml}{2}\cos\varphi\cdot\ddot{\varphi} + \frac{ml}{2}\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}^2 = -2c(x-l) \\ &-\frac{\cos\varphi}{2}\ddot{x} + \frac{l}{3}\ddot{\varphi} = -\frac{g}{2}\sin\varphi \end{aligned}}$$

ЛАГРАН. Ј-НЕ II ВРСТЕ

(sl.159). Telo AB, mase m_1, klizanjem kraja A bez trenja po vertikalnoj vodjici, može da se kreće u vertikalnoj ravni. Na kraju mu B može da se obrće bez trenja cilindar, poluprečnika R i mase m_2, oko koga je omotano uže. Drugi kraj užeta je omotan oko cilindra 0, mase m_2 i poluprečnika R, koji može da se obrće bez trenja oko nepokretne ose 0. Srednji deo užeta, zanemarljive težine, je prebačen preko nepokretnog kotura C, zanemarljivih dimenzija i mase. Kretanje sistema u vertikalnoj ravni nastaje usled dejstva težina i obrtnog momenta M na cilindar 0. Odrediti obrtni moment M pod uslovom da se telo AB kreće ravnomerno.



Sl. 159

Položaj tela AB odredićemo koordinatom x, čime je odredjen i položaj centra masa cilindra B. Njegovo obrtno kretanje odredićemo koordinatom φ, a obrtanje cilindra 0 koordinatom θ. Izmedju ovih koordinata uspostavljamo vezu preko cilindra B u obliku

$$R\dot\varphi = \dot x + R\dot\theta ,$$

i za generalisane koordinate usvajamo x i θ.

Za kinetičke energije pojedinih članova sistema imamo

$$E_{kAB} = \frac{1}{2} m_1 \dot x^2 , \quad E_{kB} = \frac{1}{2} m_2 \dot x^2 + \frac{1}{2} J_B \dot\varphi^2 , \quad E_{k0} = \frac{1}{2} J_0 \dot\theta^2 .$$

Iskoristimo li jednačinu veze i eliminišemo koordinatu $\dot\varphi$, za ukupnu kinetičku energiju sistema dobijamo

$$E_k = \frac{1}{4}(2m_1 + 3m_2)\cdot \dot x^2 + \frac{1}{2} m_2 R\cdot \dot x \cdot \dot\theta + \frac{1}{4}(m_2 + m_3) R^2 \cdot \dot\theta^2 .$$

Rad na mogućem pretpostavljenom pomeranju sistema vrše težine tela AB i cilindra B, kao i obrtni moment M, tako da je

$$\delta A = (m_1 g + m_2 g)\,\delta x + M\,\delta\theta .$$

Izdvajajući koeficijente uz nezavisne varijacije δx i $\delta\theta$, za generalisane sile dobijamo

$$Q_x = (m_1 + m_2)g, \quad Q = M.$$

Preostaje odredjivanje parcijalnih izvoda sadržanih u Lagranžeovim jednačinama

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot x} - \frac{\partial E_k}{\partial x} = Q_x , \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot\theta} - \frac{\partial E_k}{\partial \theta} = Q_\theta . \qquad \text{(a)}$$

Ovi su izvodi

$$\frac{\partial E_k}{\partial x} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{2}\,(2m_1 + 3m_2)\,\ddot{x} + \frac{1}{2}\,m_2 R\,\ddot{\theta}\ ;$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2}\,m_2 R\,\ddot{x} + \frac{1}{2}\,(m_2 + m_3)R^2\,\ddot{\theta}$$

i njihovom zamenom, kao i generalisanih sila u izraze (a) za jednačine kretanja dobijamo

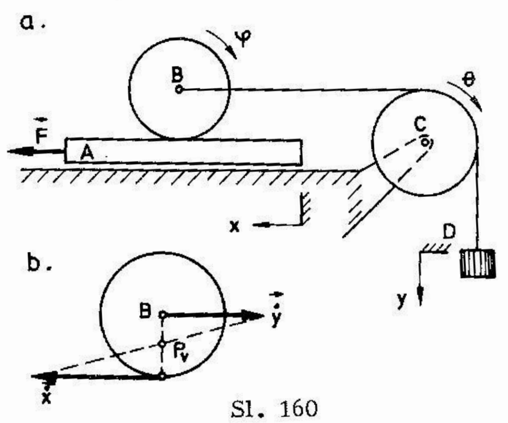
$$\frac{1}{2}\,(2m_1 + 3m_2)\,\ddot{x} + \frac{1}{2}\,m_2 R\,\ddot{\theta} = (m_1 + m_2)\,g\ ;$$

$$\frac{1}{2}\,m_2 R\,\ddot{x} + \frac{1}{2}\,(m_3 + m_2)R^2\,\ddot{\theta} = M.$$

Pri ravnomernom kretanju tela AB treba da je $\ddot{x} = 0$, odakle je

$$M = \frac{1}{2}\,(m_3 + m_2)R^2\,\ddot{\theta} = \frac{gR}{m_2}\,(m_1 + m_2)\,(m_2 + m_3).$$

(sl.160). Materijalni sistem se sastoji iz tela A, koje može da klizi po horizontalnoj glatkoj podlozi pod dejstvom sile $\vec{F}$, zatim cilindra B i C i tereta D. Sva tela su jednake mase m, sila F = 2mg, cilindri jednaki i poluprečnika R. Pretpostavlja se kotrljanje bez klizanja cilindra B po telu A, kao i otsustvo klizanja užeta po cilindru C. Zanemarujući masu užeta i trenje u ležištu C, odrediti apsolutna ubrzanja tela A i D.



Sl. 160

Položaji tela A i D su odredjeni apsolutnim koordinatama x i y, a cilindra C uglom θ. Cilindar B vrši ravno kretanje i položaj mu je odredjen apsolutnim koordinatama centra B i ugla obrtanja φ. Usled nerastegljivosti užeta koordinata y odredjuje i položaj tačke B, a otsustvo klizanja cilindra B po telu A, prema (sl.160 b), omogućava nam uspostavljanje veze

$$R\,\dot{\varphi} = \dot{x} + \dot{y}\ . \qquad \text{(a)}$$

Drugu vezu uspostavljamo izmedju koordinata θ i y oblika

$$R\,\dot{\theta} = \dot{y}\ . \qquad \text{(b)}$$

Drugih kinematičkih veza nema i od četiri koordinate x, y, φ i θ, samo su dve nezavisne. Opredelimo se za izbor koordinata x i y kao generalisanih koordinata.

Tela A i D vrše pravolinijska translatorna kretanja i njihove su kinetičke energije

$$E_{k1} = \frac{1}{2} m \cdot \dot{x}^2 , \qquad E_{k2} = \frac{1}{2} m\dot{y}^2 ,$$

a cilindar C obrtanje oko nepokretne ose, pa s obzirom na vezu (b) imamo

$$E_{k3} = \frac{1}{2} J_C \dot{\theta}^2 = \frac{1}{4} mR^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{4} m \dot{y}^2 .$$

Cilindar A vrši ravno kretanje. Pri tome, imajući u vidu vezu (a), imamo

$$E_{k4} = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} J_B \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{4} m (\dot{x} + \dot{y})^2 = \frac{1}{4} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x} \dot{y} + \frac{3}{4} m \dot{y}^2 .$$

Tako je ukupna kinetička energija sistema, prikazana preko generalisanih koordinata x i y, oblika

$$E_k = E_{k1} + E_{k2} + E_{k3} + E_{k4} = \frac{3}{4} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x} \dot{y} + \frac{3}{2} m \dot{y}^2 .$$

Za primenu Lagranžeovih jednačina II vrste

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial E_k}{\partial x} = Q_x , \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial E_k}{\partial y} = Q_y , \qquad \text{(c)}$$

formiramo izraz za mogući rad sila sistema. Pri tome imamo u vidu da na mogućem pomeranju sistema vrše rad samo sila $\vec{F}$ i težina tereta D, tako da je

$$\delta A = F \delta x + mg \delta y = Q_x \delta x + Q_y \delta y ,$$

odakle je

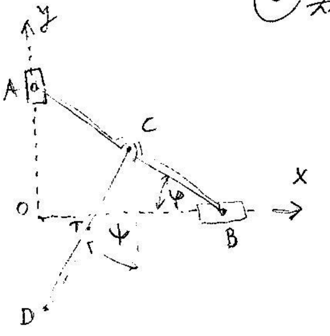
$$Q_x = F = 2mg , \quad Q_y = mg .$$

Zamenom izvoda kinetičke energije sistema i generalisanih sila u izraze (c) dobijamo jednačine kretanja sistema u obliku

$$3\ddot{x} + \ddot{y} = 4g ;$$
$$\ddot{x} + 6\ddot{y} = 2g ,$$

čija su rešenja $\ddot{x} = 22g/17$ i $\ddot{y} = 2g/17$. Ugaona ubrzanja $\ddot{\varphi}$ i $\ddot{\theta}$ odredjujemo iz jednačina veza (a) i (b) .

Sistem je u vertikalnoj ravni; osa 0y je vertikalna. Klizači A i B, svaki mase m mogu da se kreću po osama (vođicama) inercijalnog sistema 0xy. Štap AB je zanemarljive mase dužine 2b, u njegovom središtu je zglobno vezan štap CD mase m dužine 2b. Veze su idealne, u tačkama A, B i C su zglobne veze. Za date generalisane koordinate (apsolutni uglovi) φ i ψ odrediti: 1) kinetičku energiju, 2) generalisane sile, 3) diferencijalne jednačine kretanja.



3 ZADATAK   I GRUPA $q^1=\varphi$ $q^2=\psi$

$$T=\frac{1}{2}mv_A^2+\frac{1}{2}mv_B^2+\frac{1}{2}mv_T^2+\frac{1}{2}J_{Tz}\dot\psi^2$$

$v_A=\dot y_A=2b\dot\varphi\cos\varphi$ $v_T^2=b^2\dot\varphi^2+b^2\dot\psi^2+2b\dot\varphi\dot\psi\sin(\varphi+\psi)$

$v_B=\dot x_B=-2b\dot\varphi\sin\varphi$ $J_{Tz}=\frac{1}{12}m(2b)^2$

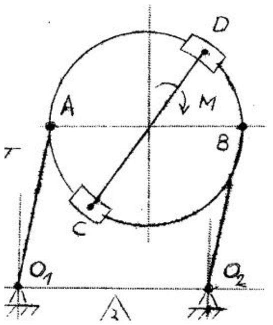
$$T=\frac{5}{2}mb^2\dot\varphi^2+\frac{2}{3}mb^2\dot\psi+mb^2\dot\varphi\dot\psi\sin(\varphi+\psi)$$

$$\delta A=-mg2b\cos\varphi\,\delta\varphi-mg(b\cos\varphi\,\delta\varphi+b\sin\psi\,\delta\psi)$$

$Q_\varphi=-3mgb\cos\varphi$ $Q_\psi=-mgb\sin\psi$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^\alpha}-\frac{\partial T}{\partial q^\alpha}=Q_\alpha$$

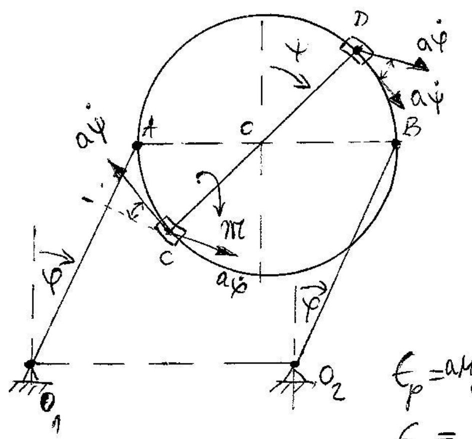
II GRUPA $q^1=\varphi$
$q^2=\theta$



Laki štapovi 0_1A i 0_2B, dužine a, mogu se obrtati oko horizontalnih paralelnih osa 0_1 i 0_2. U tačkama A i B zglobom je vezan kružni prsten poluprečnika a mase M. Po glatkom prstenu mogu se kretati klizači C i D, svaki mase m (spojeni su lakim štapom CD na koji dejstvuje spreg sila momenta ***M***. Za opisani dinamički sistem odrediti: 1) diferencijalne jednačine kretanja, 2) prve integrale kretanja.

$\overline{CD}=2a$ ③ ZADATAK (OBE GRUPE) $\overline{O_1A}=\overline{O_2B}=a$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot q^\alpha} - \frac{\partial E_k}{\partial q^\alpha} = Q_\alpha^k + Q_\alpha^n$$



$q^1=\psi \quad q^2=\varphi$

$$E_k = \frac{1}{2}Mv_0^2 + \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}mv_D^2$$

$$v_D^2 = (a\dot\varphi)^2 + (a\dot\psi)^2 + 2a^2\dot\varphi\dot\psi\cos(\psi-\varphi)$$

$$v_C^2 = (a\dot\varphi)^2 + (a\dot\psi)^2 - 2a^2\dot\varphi\dot\psi\cos(\psi-\varphi)$$

$$E_k = \left(\frac{1}{2}M + m\right)a^2\dot\varphi^2 + ma^2\dot\psi^2$$

$$E_p = aMg\cos\varphi + mg(a\cos\varphi + a\cos\psi) + mg(a\cos\varphi - a\cos\psi)$$

$$E_p = Mga\cos\varphi + 2mga\cos\varphi$$

$$Q_\varphi^k = -\frac{\partial E_p}{\partial\varphi} \qquad Q_\psi^n = M$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial\varphi} = -(Mga + 2mga)\sin\varphi$$

(1) $2ma^2\ddot\psi = M$

(2) $a^2(M+2m)\ddot\varphi = (M+2m)ga\sin\varphi \Rightarrow a\ddot\varphi = g\sin\varphi$

(1) $\Rightarrow$ $\dot\psi = \frac{M}{2ma^2}t + C_1$

(2) $\Rightarrow$ $\frac{\dot\varphi^2}{2} = -\frac{g}{a}\cos\varphi + C_2$