Математика 2 - први колоквијум

смене 7 и 10 23.3.2020. група 1

Д. Ђукић

1. Наћи неодређени интеграл $\displaystyle\int \sqrt{x}\,\ln\frac{1+x}{1-x}\,dx$.
2. Израчунати $\displaystyle\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \cos x\sqrt{\cos\frac{2x}{3}}\,dx$.
3. Израчунати $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$.
4. Крива $y=x^3$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$ ротира око x-осе. Одредити површину добијеног тела.

РЕШЕЊА

1. Почећемо парцијалном интеграцијом:

$$I=\int\sqrt{x}\,\ln\frac{1+x}{1-x}\,dx \left|\begin{smallmatrix} u=\ln\frac{1+x}{1-x} & v=\frac{2}{3}x^{3/2} \\ du=\frac{2dx}{1-x^2} & dv=\sqrt{x}\,dx\end{smallmatrix}\right| \int u\,dv=uv-\int v\,du=\frac{2}{3}x^{3/2}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{4}{3}\int\frac{x^{3/2}dx}{x^2-1}.$$

Даље је $\displaystyle\int\frac{x^{3/2}dx}{x^2-1}\left|\begin{smallmatrix} x=t^2 \\ dx=2tdt\end{smallmatrix}\right|\frac{2t^4dt}{t^4-1}=\int\left(2+\frac{2}{t^4-1}\right)dt=2t+\int\frac{2\,dt}{t^4-1}$. Како је $t^4-1=(t-1)(t+1)(t^2+1)$, важи $\frac{2}{t^4-1}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}+\frac{Ct+D}{t^2+1}$ за неке коефицијенте A,B,C,D. Множење са t^4-1 даје

$$\begin{aligned}2&=A(t^3+t^2+t+1)+B(t^3-t^2+t-1)+(Ct+D)(t^2-1)\\ &=\cancelto{0}{(A+B+C)}\cdot t^3+\cancelto{0}{(A-B+D)}\cdot t^2+\cancelto{0}{(A+B-C)}\cdot t+\cancelto{2}{(A-B-D)},\end{aligned}$$

одакле налазимо $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{1}{2}$, $C=0$ и $D=-1$, тј. $\frac{2}{t^4-1}=\frac{1/2}{t-1}-\frac{1/2}{t+1}-\frac{1}{t^2+1}$. Следи да је $\int\frac{x^{3/2}dx}{x^2-1}=\frac{2t^4dt}{t^4-1}=2t+\frac{1}{2}\ln(t-1)-\frac{1}{2}\ln(t+1)-\operatorname{arctg}t+\text{const}=2\sqrt{x}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}-\operatorname{arctg}\sqrt{x}+\text{const}$. Најзад,

$$I=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\,\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{8}{3}\sqrt{x}+\frac{2}{3}\ln\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}-\frac{4}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{x}+\text{const}.$$

2. Имамо

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\frac{3\pi}{4}}\cos x\sqrt{\cos\frac{2x}{3}}\,dx\left|\begin{smallmatrix} x=3t \\ dx=3dt\end{smallmatrix}\right| 3\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 3t\sqrt{\cos 2t}\,dt=3\int_0^{\frac{\pi}{4}}(4\cos^3 t-3\cos t)\sqrt{2\cos^2 t-1}\,dt\\ &=3\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-4\sin^2 t)\sqrt{1-2\sin^2 t}\cos t\,dt\left|\begin{smallmatrix} u=\sin t \\ du=\cos t dt\end{smallmatrix}\right| 3\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(1-4u^2)\sqrt{1-2u^2}\,du\\ &\left|\begin{smallmatrix} u=\frac{\sin y}{\sqrt{2}} \\ du=\frac{\cos y dy}{\sqrt{2}}\end{smallmatrix}\right| \frac{3}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-2\sin^2 y)\cos^2 y\,dy=\frac{3}{4\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4\cos^2 y-2\sin^2 2y)dy\\ &=\frac{3}{4\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2+2\cos 2y-1+\cos 4y)dy=\frac{3}{16\sqrt{2}}(4y+4\sin 2y+\sin 4y)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3\pi}{8\sqrt{2}}\approx 0{,}83304.\end{aligned}$$

3. Имамо $\displaystyle I=\int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}\left|\begin{smallmatrix} x=\ln t \\ dx=dt/t\end{smallmatrix}\right|\int_1^{\infty}\frac{dt}{t\sqrt{t-1}}\left|\begin{smallmatrix} t=y^2+1 \\ dt=2ydy\end{smallmatrix}\right|\int_0^{\infty}\frac{2dy}{y^2+1}=2\operatorname{arctg}y\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi\approx 3{,}14159.$

4. По формули је

$$V=2\pi\int_0^1 y\sqrt{1+y'^2}dx=2\pi\int_0^1 x^3\sqrt{1+9x^4}dx\left|\begin{smallmatrix} t=1+9x^4 \\ dt=36x^3dx\end{smallmatrix}\right|\frac{\pi}{18}\int_1^{10}\sqrt{t}\,dt=\frac{\pi}{18}\cdot\frac{2}{3}t^{3/2}\Big|_1^{10}=\frac{10\sqrt{10}-1}{27}\pi\approx 3{,}56312.$$