Математика 2

Душан Ђукић

6 – 7. Функције више променљивих

1. Основни појмови

Функција n променљивих је нека функција облика

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где су $x_1, \dots, x_n$ реалне променљиве. Пошто су n-торке $(x_1, \dots, x_n)$ елементи n-димензионалног простора $\mathbb{R}^n$, реч је о функцији дефинисаној на простору $\mathbb{R}^n$ или на неком његовом подскупу D. Тај подскуп $D \subset \mathbb{R}^n$ је *домен* функције f. Зато кажемо да је f пресликавање из D у $\mathbb{R}$ и означавамо $f : D \to \mathbb{R}$.

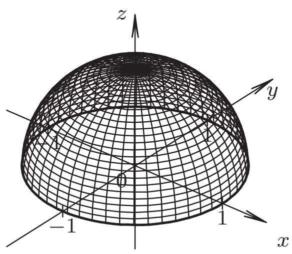
Примери оваквих функција су свуда:

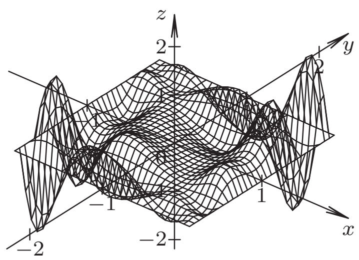
- Површина правоугаоника са страницама x и y је функција две променљиве x и y: $f(x, y) = xy$;
- Температура ваздуха у тачки са координатама (x, y, z) је функција три променљиве x, y, z.

Ако је $f(x, y)$ функција двеју променљивих дефинисана за $(x, y) \in D$, њен *график* је скуп одговарајућих тачака $(x, y, f(x, y))$ у тродимензионалном простору. Овај график је обично нека површ.

Пример 1. На слици лево је график функције $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ за (x, y) на кругу $x^2 + y^2 \leqslant 1$. То је горња полусфера са центром у координатном почетку и полупречником 1

На слици десно је график функције $z = (x + y)\sin(4 - 4x^2)\sin(9 - 9y^2)$ за $-1 \leqslant x, y \leqslant 1$.





У општем случају, ако је $f : D \to \mathbb{R}$ функција n променљивих на скупу $D \subset \mathbb{R}^n$, њен *график* је скуп тачака $\big(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)\big)$, тј. $(a, f(a))$ за $a = (x_1, \dots, x_n) \in D$. У овом случају график је подскуп скупа $D \times \mathbb{R}$, а он лежи у простору $\mathbb{R}^{n+1}$.

Подсетимо се да је растојање између тачака $A(a_1, \dots, a_n)$ и $B(b_1, \dots, b_n)$ у простору $\mathbb{R}^n$ дато формулом

$$d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2}.$$

За функције више променљивих, лимес и непрекидност се уводе слично као за функције једне променљиве.

Нека је $f : D \to \mathbb{R}$ функција на скупу $D \subseteq \mathbb{R}^n$ и нека је $\mathbf{a} \in D$.

Формална дефиниција 1. Лимес $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(x)$ је једнак m ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ такво да важи $|f(\mathbf{x}) - m| < \varepsilon$ кад год је $0 < d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \delta$.

Другим речима: Кад се тачка $\mathbf{x}$ приближава тачки $\mathbf{a}$, вредност функције $f(\mathbf{x})$ се приближава вредности m.

Формална дефиниција 2. Функција f је *непрекидна* у тачки $\mathbf{a}$ ако је $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$.

Функција f је непрекидна на скупу D ако је непрекидна у свакој тачки тог скупа.

Другим речима: Функција f је непрекидна ако мале промене промењљивих узрокују мале промене вредности функције.

2. Парцијални изводи

Посматрајмо функцију $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по n промењљивих. Дакле, $f : D \to \mathbb{R}$, где је D нека област у простору $\mathbb{R}^n$. Нека је $\mathbf{a} \in D$ нека тачка у домену функције.

Парцијални извод функције f по њеној i-тој промењљивој (тј. x_i) представља извод функције f посматране као функције по једној промењљивој x_i, сматрајући да су све остале промењљиве фиксиране.

Формална дефиниција 3. *Први парцијални извод* функције f по i-тој промењљивој x_i у датој тачки $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ је

$$f'_{x_i}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_i{+}h, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)}{h},$$

ако овај лимес постоји.

Другим речима: Парцијални извод f'_{x_i} представља стопу раста (или пада) функције f у зависности од њене i-те промењљиве.

Ако парцијални извод $f'_{x_i}(\mathbf{a})$ постоји, кажемо да је функција f *диференцијабилна* по промењљивој x_i у тачки $\mathbf{a}$. Функција је *непрекидно диференцијабилна* по x_i ако је $f'_{x_i}(\mathbf{a})$ непрекидна функција по $\mathbf{a}$.

Функција f је *непрекидно диференцијабилна* ако је непрекидно диференцијабилна по свакој промењљивој, и то у унутрашњости целог домена.

Градијент функције f је вектор

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{a}) = \big(f'_{x_1}(\mathbf{a}), \ldots, f'_{x_n}(\mathbf{a})\big).$$

Први диференцијал функције f у тачки $\mathbf{a}$ је

$$df(\mathbf{a}) = f'_{x_1}(\mathbf{a})dx_1 + f'_{x_2}(\mathbf{a})dx_2 + \cdots + f'_{x_n}(\mathbf{a})dx_n = \operatorname{grad} f(\mathbf{a}) \cdot \vec{dx},$$

где је $\vec{dx} = (dx_1, \ldots, dx_n)$. На десној страни горње једнакости је, наравно, скаларни производ вектора $\operatorname{grad} f(\mathbf{a})$ и $\vec{dx}$.

Другим речима: Диференцијал $df(\mathbf{a})$ представља (бесконачно малу) промену функције f при померају тачке $\mathbf{a}$ за бесконачно мали вектор $\vec{dx}$.

Парцијални изводи представљају изводе функције дуж координатних оса у позитивном смеру. По аналогији, може се увести и *извод функције f у смеру датог вектора $\vec{v}$*:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\mathbf{a}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\vec{v}) - f(\mathbf{a})}{h|\vec{v}|}.$$

Како је $f(\mathbf{a} + h\vec{v}) = f((a)) + \operatorname{grad} f(\mathbf{a}) \cdot h\vec{v} + o(h)$ када $h \to 0$, имамо

Тврђење 1. Извод у смеру вектора $\vec{v}$ једнак је $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\mathbf{a}) = \operatorname{grad} f(\mathbf{a}) \cdot \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$.

Овај израз је највећи када вектори $\operatorname{grad} f(\mathbf{a})$ и $\vec{v}/|\vec{v}|$ имају исти смер.

Другим речима: Функција најбрже расте у смеру свог градијента (ако он није $\vec{0}$).

Пример 2. Дате су функција $f(x, y) = x^2 y$, тачка $A(1, 1)$ и вектор $\vec{v} = (1, 1)$.

(a) Парцијални извод f'_x налазимо фиксирањем друге промењљиве y (као да је константа): $f'_x = \frac{d}{dx}(x^2 y) = \frac{d}{dx}(x^2) \cdot y = 2xy$. Слично, $f'_y = \frac{d}{dy}(x^2 y) = x^2 \cdot \frac{d}{dy}(y) = x^2$.

(б) Њен градијент је $\operatorname{grad} f(x,y) = (2xy, x^2)$. У тачки A он је једнак $\operatorname{grad} f(A) = (2,1)$.

(в) Први диференцијал је $df = 2xy\,dx + x^2\,dy$.

(г) Извод у правцу вектора $\vec{v}$ у тачки A је

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(A) = \operatorname{grad} f(A) \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = (2,1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Парцијални изводи задовољавају исте релације као и обични изводи:

$$(f+g)'_{x_i} = f'_{x_i} + g'_{x_i}, \quad (fg)'_{x_i} = f'_{x_i} g + f g'_{x_i}, \quad \left(\frac{f}{g}\right)'_{x_i} = \frac{f'_{x_i} g - f g'_{x_i}}{g^2}.$$

Испитајмо шта се дешава за сложене функције. Нека су $g_1, \dots, g_n$ непрекидно диференцијабилне функције по k промењивих $x_1, \dots, x_k$. На тај начин $f(g_1, \dots, g_n)$ представља сложену функцију по $x_1, \dots, x_k$. Претпоставимо да се промењива x_i увећа за h.

– Тада се g_j увећава за $\Delta g_j = \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \cdot h + o(h)$ када $h \to 0$;
– При томе, f се увећава за $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial g_j} \cdot \Delta g_j + o(h) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial g_j} \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \cdot h + o(h)$.

Добијамо следеће тврђење.

Тврђење 2. Ако су функције $f(g_1, \dots, g_n)$ и $g_i(x_1, \dots, x_k)$ за $1 \leqslant i \leqslant n$ диференцијабилне, онда је

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial g_j} \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_i}.$$

Функција f може да буде задата и имплицитно, једначином облика $g(x_1, \dots, x_n, f) = 0$. У том случају, претходно тврђење о сложеној функцији нам даје $0 = \frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{\partial g}{\partial x_1} + \frac{\partial g}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial x_i}$, што нам даје:

Тврђење 3. Ако је функција f имплицитно задата једначином $g(x_1, \dots, x_n, f) = 0$, онда су њени парцијални изводи

$$f'_{x_i} = -\frac{g'_{x_i}}{g'_f} = -\frac{\partial g / \partial x_i}{\partial g / \partial f}.$$

Пример 3. Реална функција $z(x,y)$ је задата једнакошћу

$$f(x,y,z) = z^3 + xz - y = 0.$$

Одредити парцијалне изводе z_x и z_y у тачки $(x,y) = (1,2)$.

Решење. Свакако је

$$z_x = -\frac{f_x}{f_z} = -\frac{z}{3z^2 + x} \quad \text{и} \quad z_y = -\frac{f_y}{f_z} = \frac{1}{3z^2 + x}.$$

Међутим, вредност функције z у тачки $(1,2)$ нам није дата. Њу одређујемо решавањем једначине по z:

$$z^3 + z - 2 = 0,$$

тј. $(z-1)(z^2+z+2) = 0$, одакле налазимо $z = z(1,2) = 1$.

Најзад, за $(x,y,z) = (1,2,1)$ добијамо $z_x = -\frac{1}{4}$ и $z_y = \frac{1}{4}$.

3. Парцијални изводи вишег реда

Индуктивно се уводе парцијални изводи вишег реда. На пример, други парцијални извод функције f по промењивим x_i и x_j је

$$f''_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right),$$

итд.

Испоставља се да мешовити парцијални изводи вишег реда не зависе од редоследа диференцирања, под условом да је функција f непрекидно диференцијабилна довољан број пута:

Тврђење 4. Ако је функција f двапут непрекидно диференцијабилна, важи

$$f''_{x_i x_j} = f''_{x_j x_i}.$$

Слично, ако је функција f непрекидно диференцијабилна k пута, мешовити парцијални изводи k-тог реда не зависе од редоследа диференцирања.

Такође се индуктивно уводе диференцијали вишег реда:

$$d^k f = d(d^{k-1} f),$$

где dx_i третирамо као константе. Тако је

$$d^2 f = \sum_{i,j} f''_{x_i x_j} dx_i dx_j, \quad d^3 f = \sum_{i,j,k} f'''_{x_i x_j x_k} dx_i dx_j dx_k, \quad \text{итд.}$$

Видимо да је диференцијал $d^k f$ полином степена k по $dx_1, \ldots, dx_n$.

У случају функције две променљиве, једноставном индукцијом се показује да за ове диференцијале важи формула налик на биномну:

Тврђење 5. Ако је $f = f(x, y)$, онда је

$$d^n f = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-i} \partial y^i} dx^{n-i} dy^i.$$

где $\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-i} \partial y^i}$ означава n-ти парцијални извод функције f добијен диференцирањем $n - i$ пута по x и i пута по y.

Пример 4. Наћи први и други диференцијал функције $f(x, y) = xe^{x-y}$.

Решење. Парцијални изводи првог и другог реда су

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= (x + 1)e^{x-y}, \\ f_y(x, y) &= -xe^{x-y}, \\ f_{xx}(x, y) &= (x + 2)e^{x-y}, \\ f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) &= -(x + 1)e^{x-y}, \\ f_{yy}(x, y) &= xe^{x-y}. \end{aligned}$$

Према томе,

$$df(x, y) = (x + 1)e^{x-y} dx - xe^{x-y} dy$$

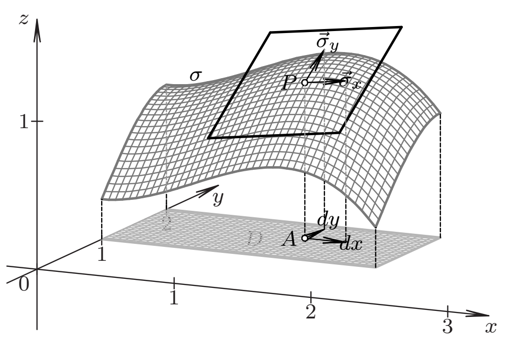
и

$$d^2 f(x, y) = (x + 2)e^{x-y} dx^2 - 2(x + 1)e^{x-y} dxdy + xe^{x-y} dy^2.$$

4. Тангентна раван и нормала на површ

Један од начина на који се површ σ у xyz-простору може задати је експлицитан - као график неке функције $z = z(x, y)$. Посматрајмо неку тачку $P\big(x_0, y_0, z(x_0, y_0)\big)$ на површи σ. Она одговара тачки $A(x_0, y_0)$ у xy-равни. Ако се тачка A помери у правцу x-осе за dx, вредност $z(A)$ промениће се за $z'_x(A)dx$, тако да ће се тачка P на површи померити тангентно на раван, за вектор $\big(1, 0, z'_x(A)\big)dx$. Слично, ако се тачка A помери у правцу y-осе за dy, тачка P ће се померити за вектор $\big(0, 1, z'_y(A)\big)dy$ у тангентној равни. Према томе, тангентна раван је раван кроз тачку P одређена векторима

$$\sigma_x = \big(1, 0, z'_x(A)\big) \quad \text{и} \quad \sigma_y = \big(0, 1, z'_y(A)\big).$$



Сада лако налазимо и нормалу у тачки P на површ, тј. на ову тангентну раван:

$$\vec{n} = \sigma_x \times \sigma_y = \left(-z'_x(A), -z'_y(A), 1\right).$$

Сада тангентна раван у тачки P има једначину

$$-z'_x(A) \cdot (x - x_0) - z'_y(A) \cdot (y - y_0) + (z - z_0) = 0.$$

Слично поступамо и ако нам је површ σ задата имплицитно или параметарски. Све у свему:

Тврђење 6. Нека је P тачка на глаткој површи σ, а $\vec{n}$ нормала на површ у тачки P.

- Ако је σ дата експлицитно, тј. условом $z = z(x, y)$, може се узети $\vec{n} = (-z_x(A), -z_y(A), 1)$;
- Ако је σ дата имплицитно, тј. условом $f(x, y, z) = 0$, може се узети $\vec{n} = (f'_x(P), f'_y(P), f'_z(P))$;
- Ако је σ дата параметарски, тј. условима $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ и $z = z(u, v)$, може се узети $\vec{n} = \vec{\sigma}_u \times \vec{\sigma}_v$, где су $\vec{\sigma}_u = (x'_u, y'_u, z'_u)$ и $\vec{\sigma}_v = (x'_v, y'_v, z'_v)$.

Најзад, једначина одговарајуће тангентне равни је

$$n_x \cdot (x - x_0) + n_y \cdot (y - y_0) + n_z \cdot (z - z_0) = 0,$$

где је $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ вектор нормале.

Пример 5. Наћи тангентну раван на сферу $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ у тачки $A(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$.

Решење. Овде је $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$.

Нормала у тачки A је

$$\vec{n} = (f_x(A), f_y(A), f_z(A)) = (2x, 2y, 2z) = (\tfrac{2}{3}, \tfrac{4}{3}, -\tfrac{4}{3}).$$

Тангентна раван је $\frac{2}{3} \cdot (x - \frac{1}{3}) + \frac{4}{3} \cdot (y - \frac{2}{3}) - \frac{4}{3} \cdot (z + \frac{2}{3}) = 0$, тј.

$$x + 2y - 2z - 3 = 0.$$

5. Тејлоров полином

Нека је $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ непрекидно диференцијабилна функција и $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ тачка унутар њеног домена. Ако нам је вредност $f(A)$ позната, а треба нам вредност $f(X)$ у некој оближњој тачки $X = (x_1, \ldots, x_n)$, природно ћемо покушати да је проценимо линеарно. Овакву процену даје нам први диференцијал функције:

$$df(A) = f'_{x_1}(A)dx_1 + \cdots + f'_{x_n}(A)dx_n.$$

То у ствари значи да је

$$f(X) \approx T_1(X) = f(A) + f'_{x_1}(A) \cdot (x_1 - a_1) + f'_{x_2}(A) \cdot (x_2 - a_2) + \cdots + f'_{x_n}(A) \cdot (x_n - a_n),$$

при чему ће одступање бити сразмерно мало у односу на растојање $d(X, A)$.

Овако је функција f апроксимирана линеарном функцијом T_1, при чему се вредности и први диференцијали функција f и T_1 у тачки A, а самим тим и сви изводи првог реда, поклапају. График функције T_1 је управо тангентна раван на површ одређену функцијом f.

Што је тачка X ближа тачки A, ова апроксимација биће тачнија. Ипак, ово нам често неће бити довољно. Зато ћемо, као и у случају функција једне променљиве, боље учинити апроксимацијом функције f полиномом вишег степена.

Тејлоров полином даје једну могућност за такву апроксимацију. Као и код функција једне променљиве, то је полином

$$T_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

степена k чија се и вредност и сви изводи до k-тог реда поклапају са одговарајућим вредностима за функцију f - наравно, под претпоставком да је функција f непрекидно диференцијабилна k пута.

Тврђење 7. Тејлоров полином степена k за функцију f у околини тачке $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ се може записати као

$$T_k(X) = f(A) + df(A) + \frac{1}{2!}d^2 f(A) + \cdots + \frac{1}{k!}d^k f(A),$$

где је $X = (x_1, \ldots, x_n)$ и где након развоја „диференцијала” замењујемо dx_i са $x_i - a_i$.

Није тешко видети да овај полином има својство које нам треба, као и да је то једини такав полином. Самим тим, он има својство да је

$$f(X) = T_k(X) + o(h^k) \text{ када } h \to 0, \quad \text{где је} \quad h = d(X, A).$$

Другим речима: Тејлоров полином степена k је „најтачнија могућа” апроксимација функције f полиномом k-тог степена у околини тачке A.

У случају функција двеју променљивих овај израз поприма следећи облик:

Тврђење 8. Тејлоров полином степена n функције $f(x, y)$ у околини тачке (a, b) је

$$\begin{aligned} T_k(x, y) = f(a, b) &+ f'_x(a, b)\cdot(x-a) + f'_y(a, b)\cdot(y-b) \\ &+ \frac{1}{2!}\left(f''_{xx}(a, b)\cdot(x-a)^2 + 2f''_{xy}(a, b)\cdot(x-a)(y-b) + f''_{yy}(a, b)\cdot(y-b)^2\right) \\ &+ \cdots \\ &+ \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-i}\partial y^i}(a, b)\cdot(x-a)^{n-i}(y-b)^i. \end{aligned}$$

Пример 6. Наћи Тејлоров полином степена 2 за функцију $f(x, y) = \sqrt{1+x+xy}$ у околини тачке $(0, 0)$.

Решење. Имамо

$$f'_x = \frac{1+y}{2\sqrt{1+x+xy}}, \quad f'_y = \frac{x}{2\sqrt{1+x+xy}}$$

и

$$f''_{xx} = -\frac{(1+y)^2}{4(1+x+xy)^{3/2}}, \quad f''_{xy} = \frac{2+x+xy}{4(1+x+xy)^{3/2}}, \quad f''_{yy} = -\frac{x^2}{4(1+x+xy)^{3/2}}.$$

У тачки $(x, y) = (0, 0)$ је

$$f'_x = \frac{1}{2}, \quad f'_y = 0, \quad f''_{xx} = -\frac{1}{4}, \quad f''_{xy} = \frac{1}{2}, \quad f''_{yy} = 0.$$

Тако добијамо Тејлоров полином

$$T_2(x, y) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}xy.$$

6. Тачке екстремума

Претпоставимо да непрекидно диференцијабилна функција $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ достиже свој локални екстремум (минимум или максимум) у тачки $A = (a_1, \ldots, a_n)$. Тада је A тачка екстремума и по свакој променљивој, што значи да су сви први парцијални изводи функције f једнаки нули:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(A) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) = 0, \quad \text{тј.} \quad \operatorname{grad} f(A) = 0. \tag{5.1}$$

Тачке A које имају својство (5.1) зову се *стационарне тачке.*

Другим речима: Ако је $f(x, y)$ функција по две променљиве, њене стационарне тачке су тачке у којима је тангентна раван хоризонтална.

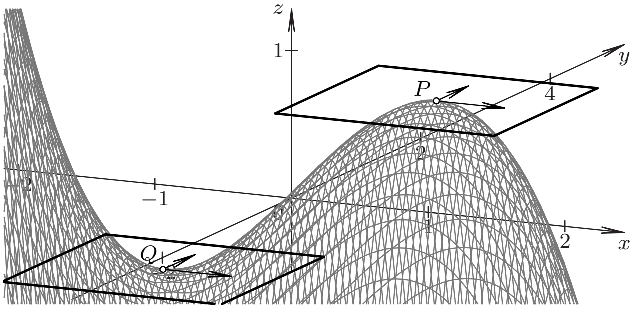
Према томе:

Тврђење 9. Тачка у којој функција f достиже локални екстремум може бити

(1°) њена стационарна тачка, или
(2°) тачка у којој функција f није непрекидно диференцијабилна.

С друге стране, не мора свака стационарна тачка бити тачка екстремума.

Пример 7. На слици је приказан график функције $f(x, y) = x+y-\frac{1}{3}x^3-4y^2$. Запажамо две стационарне тачке, $(\pm 1, \frac{1}{8})$, којима одговарају тачке P и Q на графику. Тачка P је тачка локалног максимума (али не и глобалног), док тачка Q није тачка локалног екстремума (у неким смеровима расте, у другим опада).



Испитајмо под којим условима је стационарна тачка A тачка локалног екстремума. Подсетимо се да је, за X у околини тачке A, када $\vec{dx} = (dx_1, \dots, dx_n) := X - A \to 0$,

$$f(A+\vec{dx}) = f(A) + \overset{0}{\cancel{df(A)}} + \frac{1}{2!}d^2f(A) + \overset{o(|dx|^2)}{\cancel{\left(\frac{1}{3!}d^3f(A) + \frac{1}{4!}d^4f(A) + \cdots\right)}} \approx f(A) + \frac{1}{2}d^2f(A).$$

Дакле, кључан нам је знак члана

$$d^2f(A) = \sum_{i,j=1}^{n} f''_{x_ix_j}(A)\, dx_i \cdot dx_j,$$

који је хомоген квадратни полином по величинама $dx_1, \dots, dx_n$. Кажемо да је тај квадратни полином

- *позитивно дефинитан* ако је $d^2f(A) > 0$ за сваки избор величина $dx_1, \dots, dx_n$ које нису све нула;
- *негативно дефинитан* ако је $d^2f(A) < 0$ за сваки избор величина $dx_1, \dots, dx_n$ које нису све нула.

Видимо следеће:

Тврђење 10. Нека је функција $f(x_1, \dots, x_n)$ непрекидно диференцијабилна у тачки A.

- ако је $d^2f(A)$ позитивно дефинитан, онда је A тачка *локалног минимума*;
- ако је $d^2f(A)$ негативно дефинитан, онда је A тачка *локалног максимума*;
- ако $d^2f(A)$ мења знак, тј. ако може бити и позитивно и негативно у зависности од избора $dx_1, \dots, dx_n$, онда A *није* тачка локалног екстремума функције f.

Детаљније ћемо испитати случај две промењливе. Дакле, нека је $f(x,y)$ непрекидно диференцијабилна функција и $A(x_0, y_0)$ тачка у њеном домену. Тада је

$$d^2f(A) = E \cdot dx^2 + 2F \cdot dxdy + G \cdot dy^2,$$

где су

$$E = f_{xx}(A), \quad F = f_{xy}(A), \quad G = f_{yy}(A). \tag{5.2}$$

Дискриминанта квадратног полинома $d^2f(A)$ је 4Δ, где је

$$\Delta = G^2 - EF.$$

Знамо да је $d^2f(A)$ позитивно дефинитно ако је $\Delta < 0$ и $E > 0$, а негативно дефинитно ако је $\Delta < 0$ и $E < 0$. Тако долазимо до следећег критеријума.

Тврђење 11. Нека је A стационарна тачка непрекидно диференцијабилне функције $f(x,y)$. Величине E, F, G и Δ су дефинисане као у (5.2).

- ако је $\Delta < 0$ и $E > 0$, онда је A тачка *локалног минимума* функције f;
- ако је $\Delta < 0$ и $E < 0$, онда је A тачка *локалног максимума* функције f;
- ако је $\Delta > 0$, онда A није тачка локалног екстремума функције f.

Пример 8. Наћи тачке локалних екстремума функције

$$f(x,y) = x^2y(1-x-y), \quad 0 < x, y < 1.$$

Решење. Имамо
$$f'_x = xy(2-3x-2y) \quad \text{и} \quad f'_y = x^2(1-x-2y).$$

Једино решење система једначина $f'_x = f'_y = 0$, тј. једина стационарна тачка, је $(x,y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

У овој тачки је
$$\begin{aligned} E = f''_{xx} &= 2y(1-3x-y) = -3/8, \\ F = f''_{xy} &= x(2-3x-4y) = -1/4. \\ G = f''_{yy} &= -2x^2 = -1/2. \end{aligned}$$

Сада је
$$\Delta = -\frac{1}{8} \quad \text{и} \quad E < 0,$$
што значи да је $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ тачка локалног максимума.

У „граничном” случају, када је $\Delta = 0$, потребно је испитати изводе вишег реда (трећег, четвртог, итд.) пошто нам изводи другог реда не дају довољно информација.

Пример 9. (а) Посматрајмо функцију $f(x,y) = x^4 + y^4$.

Њена једина стационарна тачка је $A(0,0)$. У тој тачки је $df(A) = 0$, али је такође $d^2 f(A) = d^3 f(A) = 0$.

Ипак, A је тачка локалног минимума функције f јер је
$$d^4 f(A) = 24(dx^4 + dy^4)$$
строго позитивно кад год dx и dy нису оба нуле.

(б) Посматрајмо сада функцију $f(x,y) = x^3 + y^3$.

Као и у претходном случају, њена једина стационарна тачка је $A(0,0)$. У тој тачки је $df(A) = d^2 f(A) = 0$, али A није тачка локалног екстремума јер
$$d^3 f(A) = 6(dx^3 + dy^3)$$
може да буде и позитивно и негативно.

7. Задаци

1. Дата је функција $f(x,y) = \sqrt{2u - v}$, где је $u = x^2 y^2$ и $v = 2x + y$. Одредити f'_x и f'_y (а) директно; (б) коришћењем правила о парцијалним изводима сложене функције (и уверити се да је исти резултат).
2. Одредити прве и друге парцијалне изводе функције $z(x,y) = x^y \cdot y^2$.
3. Нека је f диференцијабилна функција и $z(x,y) = xf(\ln x - \ln y)$. Доказати да важи $xz'_x + yz'_y = z$.
4. Наћи први диференцијал функције $f(x,y,z) = \frac{x^2 z}{x+y+z}$.
5. Наћи други диференцијал функције $f(x,y) = e^{x+y} \sin x \cos y$.
6. Нека је $x = u^3 + v$, $y = u + v^3$ и $z = u + v$. Познато је да је $z(3,9) = 3$. Одредити извод z'_x у тачки $(x,y) = (3,9)$.
7. Одредити тангентну раван и вектор нормале на површ дату једначином $z = xy$ за $(x,y) = (3,1)$.
8. Одредити тангентну раван и вектор нормале на површ дату једначином $x^3 + y^3 + z^3 + 4xyz = 0$ у тачки $(2,1,-1)$.
9. Одредити тангентну раван на површ π дату параметарски: $(x,y,z) = (u + v^2, u^2 + v^3, u^3 + v)$ у тачки у којој је $u = v = 1$.
10. На површи датој једначином $xy + z^2 = 1$ наћи тачку у којој је тангентна раван нормална на праву $x = y = z$.
11. Одредити тачку у којој тангентна раван на површ $z = x^2 + y^2$ садржи тачке $A(1,0,0)$ и $B(0,2,0)$.
12. Наћи Тејлоров полином реда 2 за функцију $f(x,y) = \frac{1}{2x+y+xy}$ у тачки $(x,y) = (1,1)$.

13. Наћи Маклоренов полином реда 3 за функцију $f(x,y) = (1+x^2+2y^2)e^{-xy}$.

14. Наћи Маклоренов полином реда 3 за функцију $y(x)$ имплицитно дату једначином $y+\sin y = 2x$.

15. Наћи Маклоренов полином реда 2 за функцију $z(x,y)$ дату једначином $e^z + xz = y+1$.

16. Наћи тачке локалних екстремума функције $f(x,y) = x^2+2xy+y^3-6x-7y$.

17. Наћи тачке локалних екстремума функције $f(x,y) = x + \frac{y}{x} + \frac{8}{y}$, $xy \neq 0$.

18. Наћи тачке локалних екстремума функције $f(x,y) = \cos x + \cos y - \cos(x+y)$ за $x, y \in (0, 2\pi)$.

19. Наћи тачке локалних екстремума функције $f(x,y) = \frac{x+y+1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$.

6. Решења

1. (а) Пошто је $f(x,y) = \sqrt{2x^2y^2-2x-y}$, следи $f'_x = \frac{4xy^2-2}{2\sqrt{2x^2y^2-2x-y}}$ и $f'_y = \frac{4x^2y-1}{2\sqrt{2x^2y^2-2x-y}}$.

   (б) $f'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x = \frac{2}{2\sqrt{2u-v}} \cdot 2xy^2 + \frac{-1}{2\sqrt{2u-v}} \cdot 2 = \frac{4xy^2-2}{2\sqrt{2x^2y^2-2x-y}}$;
   $f'_y = f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y = \frac{2}{2\sqrt{2u-v}} \cdot 2x^2y + \frac{-1}{2\sqrt{2u-v}} \cdot 1 = \frac{4x^2y-1}{2\sqrt{2x^2y^2-2x-y}}$.

2. Извод z'_x добијамо ако фиксирамо y: $z'_x = x^{y-1}y^3$. За z'_y по правилу производа добијамо $z'_y = \frac{\partial x^y}{\partial y} \cdot y^2 + x^y \cdot \frac{\partial (y^2)}{\partial y} = x^y y(y\ln x + 2)$.

   Одавде даље добијамо $z_{xx} = x^{y-2}y^3(y-1)$, $z_{xy} = z_{yx} = x^{y-1}y^2(y\ln x+3)$ и $z_{yy} = x^y(y^2\ln^2 x + 4y\ln x + 2)$.

3. Имамо $z'_x = f(\ln x - \ln y) + xf(\ln x - \ln y)\frac{1}{x} = 2f(\ln x - \ln y)$ и $z'_y = xf(\ln x - \ln y)(-\frac{1}{y}) = -\frac{x}{y}f(\ln x - \ln y)$, па је $xz'_x + yz'_y = 2xf - xf = xf = z$.

4. Како је $f'_x = \frac{xz(x+2y+2z)}{(x+y+z)^2}$, $f'_y = \frac{-x^2z}{(x+y+z)^2}$ и $f'_z = \frac{x^2(x+y)}{(x+y+z)^2}$, следи да је

$$df = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz = \frac{xz(x+2y+2z)dx - x^2z\,dy + x^2(x+y)dy}{(x+y+z)^2} .$$

5. Лако налазимо

$$f'_x = e^{x+y}(\sin x + \cos x)\cos y, \quad f'_y = e^{x+y}\sin x(\cos y - \sin y)$$

   и одатле

$$f''_{xx} = 2e^{x+y}\cos x\cos y, \quad f''_{xy} = e^{x+y}(\sin x + \cos x)(\cos y - \sin y), \quad f''_{yy} = -2e^{x+y}\sin x \sin y.$$

   Према томе, $d^2f = f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}dy^2 = 2e^{x+y}[\cos x\cos y dx^2 + (\sin x + \cos x)(\cos y - \sin y)dxdy - \sin x \sin y dy^2]$.

6. Одредимо прво u и v ако је $(x,y,z) = (3,9,3)$. Из $u^3 + v = u + v = 3$ следи $u^3 - u = 0$, тј. $u \in \{-1, 0, 1\}$. Провером добијамо $u = 1$ и $v = 2$.

   Ако посматрамо x, y и z као функције по u и v, видимо да су њихови диференцијали $dx = 3u^2du + dv$, $dy = du + 3v^2dv$ и $dz = du + dv$. Из прве две једначине решавањем система добијамо $du = \frac{3v^2dx - dy}{9u^2v^2-1}$ и $dv = \frac{3u^2dy - dx}{9u^2v^2-1}$, па је $dz = du + dv = \frac{3v^2-1}{9u^2v^2-1}dx + \frac{3u^2-1}{9u^2v^2-1}dy$. Према томе, $z'_x = \frac{3v^2-1}{9u^2v^2-1}$. За $(u,v) = (1,2)$ је $z'_x = \frac{11}{35}$.

7. За дате x и y, вектор нормале је $\vec{n} = (-z'_x, -z'_y, 1) = (-y, -x, 1) = (-1, -3, 1)$. Како је $z(3,1) = 3$, одговарајућа тачка на површи је $(3,1,3)$, а танентна раван у њој је $-1(x-3) - 3(y-1) + 1(z-3) = 0$, тј. $-x - 3y + z = -3$.

8. Означимо $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + 4xyz$. Тада је $\vec{n} = (f_x, f_y, f_z) = (3x^2 + 4yz, 3y^2 + 4xz, 3z^2 + 4xy)$. За $(x,y,z) = (2,1,-1)$, вектор нормале је $\vec{n} = (8,-5,11)$. Тангентна раван је $8x - 5y + 11z = 8 \cdot 2 - 5 \cdot 1 + 11(-1) = 0$.

9. За $u = v = 1$ је $(x,y,z) = (2,2,2)$.

   У овој тачки имамо $\vec{\pi}_u = (1, 2u, 3u^2) = (1,2,3)$ и $\vec{\pi}_v = (2v, 3v^2, 1) = (2,3,1)$, па је $\vec{n} = \vec{\pi}_u \times \vec{\pi}_v = (-7, 5, -1)$. Тангентна раван је $-7(x-2) + 5(y-2) - (z-2) = 0$, тј. $-7x + 5y - z + 6 = 0$.

10. Ако означимо $f(x,y,z) = xy + z^2 - 1$, нормала у произвољној тачки (x,y,z) на површи је $\vec{n} = (f'_x, f'_y, f'_z) = (y, x, 2z)$. По услову задатка, овај вектор је колинеаран с вектором $(1,1,1)$, па је $y = x = 2z$. Заменом у једначину $xy + z^2 = 1$ добијамо $5z^2 = 1$, тј. $z = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$, чиме добијамо два решења: $(x,y,z) = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$ или $(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$.

11. За $(x,y) = (a,b)$ је $\vec{n} = (-z'_x, -z'_y, 1) = (-2a, -2b, 1)$, а тангентна раван је $-2a(x-a) - 2b(y-b) + (z - a^2 - b^2) = 0$, тј. $-2ax - 2by + z + (a^2+b^2) = 0$. Уврштивањем тачака A и B у једначину равни добијамо $a^2 + b^2 = 2a$ и $a^2 + b^2 = 4b$, а одавде је $a = 2b$ и $5b^2 = 4b$, тј. $(a,b) = (0,0)$ или $(a,b) = (\frac{8}{5}, \frac{4}{5})$. Дакле, постоје две тражене тачке: $(0,0,0)$ и $(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}, \frac{16}{5})$.

12. Имамо $f(1,1) = \frac{1}{4}$. Даље, парцијални изводи у тачки $A(1,1)$ су

$$f'_x = -\tfrac{y+2}{(xy+2x+y)^2} = -\tfrac{3}{16}, \quad f'_y = -\tfrac{x+1}{(xy+2x+y)^2} = -\tfrac{1}{8},$$
$$f''_{xx} = \tfrac{2(y+2)^2}{(xy+2x+y)^3} = \tfrac{9}{32}, \quad f''_{xy} = \tfrac{xy+2x+y+4}{(xy+2x+y)^3} = \tfrac{1}{8}, \quad f''_{yy} = \tfrac{2(x+1)^2}{(xy+2x+y)^3} = \tfrac{1}{8}.$$

Следи да је Тејлоров полином $T_2(x,y) = \frac{1}{4} - \frac{3}{16}(x-1) - \frac{1}{8}(y-1) + \frac{9}{64}(x-1)^2 + \frac{1}{8}(x-1)(y-1) + \frac{1}{16}(y-1)^2$.

13. Овде ћемо развити функцију e^{-xy} у Маклоренов ред *као функцију једне променљиве*, а потом добијени полином помножити са $1 + x^2 + 2y^2$. Наиме, знамо да је $e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$, па за $t = -xy$ добијамо

$$e^{-xy} = 1 - xy + \frac{1}{2}x^2y^2 + \cdots = 1 - xy + R(x,y),$$

где су сви сабирци у $R(x,y)$ степена бар 4. Одавде је $f(x,y) = (1 + x^2 + 2y^2)(1 - xy + R(x,y)) = 1 + x^2 + 2y^2 - xy + S(x,y)$, где су сви сабирци у $S(x,y)$ степена бар 4.

Према томе, тражени Маклоренов полином је $T_3(x,y) = 1 + x^2 - xy + 2y^2$.

14. Јасно је да је $y(0) = 0$. Означимо $f(x,y) = y + \sin y - 2x$. Имамо $y' = y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} = \frac{2}{1+\cos y}$. Даље диференцирамо y' као сложену функцију:

$$y'' = \tfrac{\partial}{\partial x}\left(\tfrac{2}{1+\cos y}\right) = \tfrac{2\sin y}{(1+\cos y)^2} \cdot y' = \tfrac{4\sin y}{(1+\cos y)^3}\,,$$
$$y''' = \tfrac{\partial}{\partial x}\left(\tfrac{4\sin y}{(1+\cos y)^3}\right) = \tfrac{4(3-2\cos y)}{(1+\cos y)^3} \cdot y' = \tfrac{8(3-2\cos y)}{(1+\cos y)^4}\,.$$

У тачки $x = 0$ је $y' = 1$, $y'' = 0$ и $y''' = \frac{1}{2}$, па је Маклоренов полином $T_3(x) = x + \frac{1}{12}x^3$.

15. За $x = y = 0$ је $e^z = 1$, тј. $z = 0$. Означимо $f(x,y,z) = e^z + xz - y - 1 = 0$. Тада је $z'_x = -\frac{f'_x}{f'_z} = \frac{-z}{e^z+x}$ и $z'_y = -\frac{f'_y}{f'_z} = \frac{1}{e^z+x}$. Имајући у виду ове изразе, даље добијамо

$$z''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-z}{e^z+x}\right) = \frac{-z'_x(e^z+x) + z(e^z z'_x + 1)}{(e^z+x)^2} = \frac{2z(e^z+x) - z^2e^z}{(e^z+x)^3}.$$

Слично је

$$z''_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{e^z+x}\right) = \frac{-e^z z'_x - 1}{(e^z+x)^2} = \frac{(z-1)e^z - x}{(e^z+x)^3} \quad \text{и} \quad z''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{e^z+x}\right) = \frac{-e^z z'_y}{(e^z+x)^2} = \frac{-e^z}{(e^z+x)^3}.$$

У тачки $(0,0)$ добијамо $z'_x = 0$, $z'_y = 1$, $z''_{xx} = 0$, $z''_{xy} = -1$ и $z''_{yy} = -1$. Према томе, тражени Маклоренов полином је $T_2(x,y) = y - xy - \frac{1}{2}y^2$.

16. Имамо $f'_x = 2x + 2y - 6$ и $f'_y = 2x + 3y^2 - 7$. Ако је $f'_x = f'_y = 0$, онда је $y = 3 - x$ и $f'_y = 3x^2 - 16x + 20 = 0$, одакле је $x \in \{2, \frac{10}{3}\}$. Према томе, једине стационарне тачке (x,y) су $M_1(2,1)$ и $M_2(\frac{10}{3}, -\frac{1}{3})$.

Даље, пошто је $E = f''_{xx} = 2$, $F = f''_{xy} = 2$, $G = f''_{yy} = 6y$ и $\Delta = F^2 - EG = 4(1-3y)$, добијамо $\Delta < 0$ у тачки M_1 и $\Delta > 0$ у тачки M_2, што значи да је M_1 тачка локалног екстремума (и то минимума јер је $E > 0$), док M_2 то није.

17. Стационарне тачке налазимо решавањем система $f'_x = 1 - \frac{y}{x^2} = 0$ и $f'_y = \frac{1}{x} - \frac{8}{y^2} = 0$: добијамо $y = x^2$ и $x = \frac{1}{8}y^2 = \frac{1}{8}x^4$, па је $x^3 = 8$, тј. $x = 2$ и одатле $y = 4$. Даље је $f''_{xx} = \frac{2y}{x^3}$, $f''_{xy} = -\frac{1}{x^2}$, $f''_{yy} = \frac{16}{y^3}$, па за $(x,y) = (2,4)$ имамо $\Delta = \frac{1}{x^4} - \frac{32}{x^3y^2} = -\frac{3}{16} < 0$. Како је $f''_{xx} > 0$, тачка $(x,y) = (2,4)$ је тачка локалног минимума.

18. Први парцијални изводи су $f'_x = \sin(x+y) - \sin x = 2\sin\frac{y}{2}\cos(x+\frac{y}{2})$ и $f'_y = \sin(x+y) - \sin y = 2\sin\frac{x}{2}\cos(y+\frac{x}{2})$. Нека је $f'_x = f'_y = 0$, тј. $\sin x = \sin y = \sin(x+y)$.

   (i) Ако је $y = x$, онда из $f'_x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2} = 0$ (због $\sin\frac{x}{2} \neq 0$ за $0 < x < 2\pi$) следи $x \in \{\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}\}$.

   (ii) Остаје случај $y = \pi - x$. Тада из $f'_x = f'_y = 0$ следи $\sin x = \sin y = 0$, па је $x = y = \pi$ - тачка коју смо већ нашли.

   Други парцијални изводи функције f су $f''_{xx} = \cos(x+y) - \cos x$, $f''_{xy} = \cos(x+y)$ и $f''_{yy} = \cos(x+y) - \cos y$. За $(x,y) = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ или $(\frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$ биће $\Delta = (\frac{1}{2})^2 - (-1)(-1) = -\frac{3}{4} < 0$ и $f''_{xx} < 0$, па овде имамо локални максимум. За $(x,y) = (\pi,\pi)$ је $\Delta = 1^2 - 2\cdot 2 = -3 < 0$ и $f''_{xx} > 0$, па овде имамо локални минимум.

19. Први и други парцијални изводи су

$$f'_x = \frac{y^2-xy-x+1}{(x^2+y^2+1)^{3/2}}, \quad f'_y = \frac{x^2-xy-y+1}{(x^2+y^2+1)^{3/2}},$$

$$f''_{xx} = \frac{2x^2(y+1)-(3x+y+1)(y^2+1)}{(x^2+y^2+1)^{5/2}}, \quad f''_{xy} = \frac{-x^3+2x^2y+2xy^2-y^3+3xy-x-y}{(x^2+y^2+1)^{5/2}}, \quad f''_{yy} = \frac{2y^2(x+1)-(3y+x+1)(x^2+1)}{(x^2+y^2+1)^{5/2}}.$$

   Ако је $f'_x = f'_y = 0$, онда је $x^2+y^2+1-x(x+y+1) = x^2+y^2+1-y(x+y+1)$, па како је $x^2+y^2+1 \neq 0$, мора бити $x = y$ и одатле $(x,y) = (1,1)$. У овој тачки је $f''_{xx} = f''_{yy} = \frac{-2}{3\sqrt{3}} < 0$, $f''_{xy} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ и $\Delta = -\frac{1}{9} < 0$, што значи да је то тачка локалног максимума.