U OPŠTEM SLUČAJU ZA HOLONOMNE SISTEME OD "n" MASENIH TAČAKA, NAJEFIKASNIJE JE PRATITI NJIHOVO KRETANJE POMOĆU GENERALISANIH KOORDINATA (KOJIH IMA ONOLIKO KOLIKO SISTEM IMA STEPENI SLOBODE KRETANJA, NA PRIMER "k") T.J. POMOĆU ODGOVARAJUĆIH "DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA", NA PRIMER LAGRANŽEVIH II VRSTE:

$$(*) \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = Q_i \qquad (i=1,\dots,k)$$

TO SU DIF. JEDNAČINE DRUGOG REDA (T.J. SISTEM DIF. JED) KOJIH IMA ONOLIKO KOLIKO IMA STEPENI SLOBODE KRETANJA.

*

POD ODREĐENIM USLOVIMA JEDNAČINE (*) IMAJU ODREĐEN BROJ PRVIH INTEGRALA (DIF. JED. PRVOG REDA) KOJE DATI SISTEM "REDUKUJU" T.J. ČINE GA LAKŠIM ZA REŠAVANJE. TI PRVI INTEGRALI SU LINEARNI PO BRZINAMA I NJIHOVO POSTOJANJE SE VEZUJE ZA ODGOVARAJUĆI IZBOR KOORDINATA.(**)

AKO JE ZA NEKI HOLONOMNI SISTEM (KOJI JE DAT U FORMI (*))

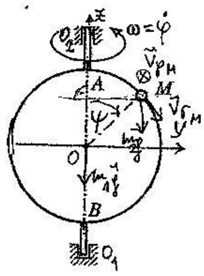
$$Q_\alpha = 0 \qquad \frac{\partial T}{\partial q^\alpha} = 0$$

(ČITAMO: GENERALISANA SILA ZA TU KOORDINATU "q_α" JE NULA; KINETIČKA ENERGIJA NIJE FUNKCIJA TE KOORDINATE "q_α") ONDA JE TA KOORDINATA "CIKLIČNA" T.J. ZA TU CIKLIČNU KOORDINATU POSTOJI "PRVI (CIKLIČNI) INTEGRAL" OBLIKA:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot q^\alpha} = C_\alpha = \text{const.} \qquad \left(\Leftarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q^\alpha}\right) = 0 \right).$$

PRIKAŽIMO KORIST OD CIKLIČNIH KOORDINATA U DVA PRIMERA.

(**) NAPOMENA: KAO ŠTO SMO U UVODU KURSA ISTAKLI U "INERCIJALNIM SISTEMIMA" REFERENCIJE VREME JE "HOMOGENO" A PROSTOR "HOMOGEN" I "IZOTROPAN". IZ HOMOGENOSTI VREMENA SLEDI "ODRŽANJE MEHANIČKE ENERGIJE"; SADA OVDE U ANALITIČKOJ DINAMICI KAŽEMO: "TRANSLACIJA VREMENA" ČINI DA "LAGRANŽIJAN" $L = T - \Pi$ OSTAJE NEPROMENLJIV T.J. LAGRANŽIJAN JE INVARIJANTAN NA TRANSLACIJU VREMENA. HOMOGENOST PROSTORA ČINI DA "LAGRANŽIJAN" OSTAJE NEPROMENLJIV PRI PARALELNOM PRENOŠENJU SISTEMA KAO CELINE T.J. KAŽEMO DA JE $L=T-\Pi$ INVARIJANTNO NA TRANSLACIJU PROSTORA — ODAVDE SE IZVODI "ODRŽANJE KOLIČINE KRETANJA" (IZOLOVANIH SISTEMA) T.J. JEDAN PRVI INTEGRAL $\sum m_\alpha \vec{V}_\alpha = \overrightarrow{\text{const.}}$ IZ IZOTROPIJE PROSTORA IZVODI SE OSOBINA "ODRŽANJA MOMENTA KOLIČINE KRETANJA" — U ANALITIČKOJ DINAMICI KAŽE SE "LAGRANŽIJAN" $L=T-\Pi$ JE INVARIJANTAN NA ROTACIJU (ZA MA KOJI UGAO). OVI PRVI INTEGRALI NE ZAVISE OD IZBORA KOORDINATA!



Disk poluprečnika R (vertikalni), mase m_1, može da se obrće oko vertikalne 0z osovine. U 0_1 je sferno, a u 0_2 cilindrično ležište. Po obodu diska može da se kreće kuglice M (materijalna tačka) mase m_2. U $t_o=0$, disk je imao ugaonu brzinu ω_o a kuglica M je zanemarljivo malom brzinom krenula iz položaja A. Odrediti ugaonu brzinu diska kada je kuglica M na 0y osi.

VEZE SU "IDEALNE".

SISTEM IMA DVA STEPENA SLOBODE KRETANJA, NEKA SU GENERALISANE KOORDINATE: $q_1=\varphi$, $q_2=\psi$. POKAŽIMO DA JE "φ" CIKLIČNA KOORDINATA.

$$T=T_{DIS}+T_M \qquad \underset{\text{(ROTACIJA OKO NEPOMIČNE OZ OSE)}}{T_{DIS}} = \frac{1}{2}J_{oz}\dot\varphi^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}m_1R^2\right)\dot\varphi^2 \qquad T_M=\frac{1}{2}m_2 V_M^2$$

$\hookrightarrow$ apsolutna brzina

$$V_{r(M)}=R\dot\psi \qquad V_{p(M)}=(R\sin\psi)\dot\varphi \qquad \vec V_{r(M)}\perp\vec V_{p(M)} \Rightarrow V^2_{M(aps)}=(R\dot\psi)^2+(R\sin\psi\dot\varphi)^2$$

$$T=\frac{1}{8}m_1R^2\dot\varphi^2+\frac{1}{2}m_2R^2\dot\psi^2+\frac{1}{2}m_2R^2\sin^2\psi\,\dot\varphi^2 \qquad T=\left(\frac{1}{8}m_1+\frac{1}{2}m_2\sin^2\psi\right)R^2\dot\varphi^2+\frac{1}{2}m_2R^2\dot\psi^2$$

$$\delta A=-mgR\sin\psi\,\delta\psi+(0)\delta\varphi \Rightarrow Q_\varphi=0 \qquad Q_\psi=-mgR\sin\psi$$

$$\begin{cases}(1)\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial\dot\varphi}-\cancelto{0}{\dfrac{\partial T}{\partial\varphi}}=\cancelto{0}{Q_\varphi} \qquad \dfrac{\partial T}{\partial\varphi}=0 \Rightarrow \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial\dot\varphi}=0 \Rightarrow \dfrac{\partial T}{\partial\dot\varphi}=C \quad \text{T.J. "}\varphi\text{" CIKLIČNA KOORDINATA}\\ (2)\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial\dot\psi}-\dfrac{\partial T}{\partial\psi}=Q_\psi \Rightarrow \text{(SASTAVITI ZA VEŽBU I OVU DIF. JED (2)....)}\end{cases}$$

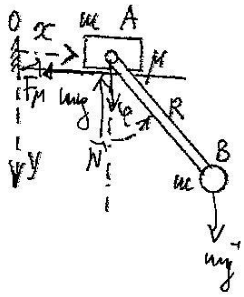
DA BI REŠILI ZADATAK NAMA JE DOVOLJAN "PRVI INTEGRAL" DIF. JED. (1)

$$\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi}=C \qquad \boxed{\underbrace{\left(\frac{1}{4}m_1+m_2\sin^2\psi\right)\dot\varphi}_{\forall t}=\underbrace{\left[\frac{1}{4}m_1+m_2\underbrace{\sin^2(0)}_{0}\right]\omega_o}_{t_o=0}} \quad (*)$$

$$\dot\varphi=\frac{\frac{1}{4}m_1\omega_0}{\left(\frac{1}{4}m_1+m_2\sin^2\psi\right)} \qquad t_1 \Rightarrow \psi_1=\frac{\pi}{2} \qquad \boxed{\dot\varphi_1=\frac{m_1}{(m_1+4m_2)}\omega_o}$$

$\boxed{\text{NAPOMENA}}$: ŠTA U JEZIKU DINAMIKE PREDSTAVLJA "PRVI INTEGRAL" $\left[\dfrac{\partial T}{\partial\dot\varphi}=C\ (*)\right]$?

PROBAJTE DA ODGOVORITE NA OVO PITANJE, KORISTITI ZNANJE IZ VEKTORSKE DINAMIKE.



Domaći zadatak

Primer: Eliptičko klatno se sastoji od klizača A mase m i masene tačke B mase m koja je lakim štapom dužine R zglobom vezana za klizač. Klizač se kreće po hrapavoj horizontalnoj vezi, a koeficijent trenja je μ. Odrediti: 1) reakciju veze između klizača i veze N=? 2) silu trenja klizanja klizača.

(*) Sledeće šta treba odrediti (nije se tražilo u domaćem zadatku) jesu diferencijalne jedančine kratanja.

Uradimo prvo slučaj kada je μ=0 (kada su veze "idealne") tj. odredimo diferencijalne jedančine kretanja. SISTEM IMA DVA STEPENA SLOBODE KRETANJA, NEKA SU GENERALISANE KOORDINATE $q_1=x$, $q_2=\varphi$

$$T=T_A+T_B \qquad T=\frac{1}{2}m_A V_A^2+\frac{1}{2}m_B V_B^2 \qquad V_A=\dot{x} \qquad V_B^2=\dot{x}_B^2+\dot{y}_B^2$$

(ELIMINIŠEMO ZAVISNE DEKARTOVE KOORDINATE POMOĆU GENERALISANIH $x,\varphi,\dot{x},\dot{\varphi}$)

$$\begin{cases} x_B=x+R\sin\varphi \\ y_B=R\cos\varphi \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_B=\dot{x}+R\dot{\varphi}\cos\varphi \\ \dot{y}_B=-R\dot{\varphi}\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \quad V_B^2=\dot{x}^2+R^2\dot{\varphi}^2+2R\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$T=m\dot{x}^2+\frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2+mR\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi \qquad \delta A=m\vec{g}\cdot\delta\vec{r}_B=mg\,\delta(R\cos\varphi)=-mgR\sin\varphi\,\delta\varphi \quad \begin{cases} Q_x=0 \\ Q_\varphi=-mgR\sin\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1)\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}}-\cancel{\dfrac{\partial T}{\partial x}}^{\,0}=\cancel{Q_x}^{\,0} \\ (2)\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}-\dfrac{\partial T}{\partial \varphi}=Q_\varphi \end{cases} \quad \left(Q_x=0,\ \frac{\partial T}{\partial x}=0\right) \text{ T.J. "}x\text{" [CIKLIČNA KOORDINATA] T.J. } \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=C}$$

"PRVI INTEGRAL" KRETANJA

$$2m\dot{x}+mR\dot{\varphi}\cos\varphi=C$$

[AKO SE U POČETNOM TRENUTKU SISTEM MIROVAO $\dot{x}_0=0$ $\dot{\varphi}_0=0$ $x(0)=x_0=0$ $\varphi(0)=\varphi_0$] $\Rightarrow$ $\underbrace{\boxed{2\dot{x}+R\dot{\varphi}\cos\varphi=0}}$ (1')

PROTUMAČITI ŠTA U VEKTORSKOJ DINAMICI OVO PREDSTAVLJA.

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=mR^2\dot{\varphi}+mR\dot{x}\cos\varphi \qquad \frac{\partial T}{\partial \varphi}=-mR\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=mR^2\ddot{\varphi}+mR\ddot{x}\cos\varphi-mR\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi$$

$$(2)\ \boxed{mR^2\ddot{\varphi}+mR\ddot{x}\cos\varphi=-mgR\sin\varphi}$$

AKO IZ (1') I (2) ELIMINIŠEMO $\ddot{x}$ I LINEARIZUJEMO SISTEM $\left[\begin{matrix}\sin\varphi\approx\varphi \\ \cos\varphi\approx 1\end{matrix}\right]$ SLEDI ($\Rightarrow$)

LINEARNI SLUČAJ

$$\ddot{\varphi}+2\left(\frac{g}{R}\right)\varphi=0 \qquad \varphi=c_1\cos\sqrt{\frac{2g}{R}}\,t+\cancel{c_2}^{\,0}\sin\sqrt{\frac{2g}{R}}\,t \qquad \varphi=\varphi_0\cos\sqrt{\frac{2g}{R}}\,t$$

U LINEARNOM SLUČAJU OVAJ SISTEM IZVODI HARMONIJSKO OSCILOVANJE SA PERIODOM

$$T=2\pi\sqrt{\frac{R}{2g}}$$

(IZ INTEGRACIJE I LINEARIZACIJE (1') POKAZATI DA REČENO VAŽI I ZA KOORDINATU "x") OTUDA SE OVAJ SISTEM I NAZIVA "ELIPTIČKO KLATNO")

* * *

AKO POSTOJI μ ($\mu\neq 0$) OVAJ DATI SISTEM NEMA CIKLIČNU KOORDINATU (JER JE $Q_x\neq 0$)

$$\delta A=m_B\vec{g}\cdot\delta\vec{r}_B+\vec{F}_\mu\cdot\delta\vec{r}_A=-mgR\sin\varphi\,\delta\varphi-(\mu N)[\operatorname{sign}\dot{x}]\,\delta x \qquad \operatorname{sign}(\dot{x})=\begin{cases}+1 & \text{za } \dot{x}>0 \\ -1 & \text{za } \dot{x}<0\end{cases}$$

U "DOMAĆEM ZADATKU" SMO TRAŽILI DA SE POKAŽE DA $N\neq mg$ T.J. DA JE $N(\ddot{\varphi},\dot{\varphi},\varphi)$

U TOM CILJU NAPIŠIMO $\dot{\vec{K}}=\vec{F}_R^{\,s}$ ili $m_A\vec{a}_A+m_B\vec{a}_B=m\vec{g}+m\vec{g}+\vec{F}_\mu+\vec{N}\ \Big/\cdot\vec{j}$

$$m\ddot{y}_A^{\to 0} + m\ddot{y}_B = 2mg - N \quad \Rightarrow \quad N = 2mg - m\ddot{y}_B \qquad \begin{cases} y_B = R\cos\varphi \quad \dot{y}_B = -R\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \ddot{y}_B = -R\ddot{\varphi}\sin\varphi - R\dot{\varphi}^2\cos\varphi \end{cases}$$

$$\boxed{N = 2mg + mR\dot{\varphi}^2\cos\varphi + mR\ddot{\varphi}\sin\varphi}$$

PA SU DIF. JED. KRETANJA (*) $\left[\; Q_\varphi = -mgR\sin\varphi \qquad Q_x = -\mu N \,\mathrm{sign}(\dot{x}) \;\right]$

$$(*)\begin{cases} (1) \quad 2m\ddot{x} + mR\ddot{\varphi}\cos\varphi - mR\dot{\varphi}^2\sin\varphi = -\mu\left(2mg + mR\dot{\varphi}^2\cos\varphi + mR\ddot{\varphi}\sin\varphi\right)\mathrm{sign}(\dot{x}) \\ (2) \quad mR^2\ddot{\varphi} + mR\ddot{x}\cos\varphi = -mgR\sin\varphi \end{cases}$$

NAPOMENA: POŠTO SISTEM NEMA CIKLIČNU KOORDINATU, SADA ZA DVA STEPENA SLOBODE KRETANJA IMAMO "DVE DIF. JEDNAČINE KRETANJA DRUGOG REDA"! KADA JE U OVOM SISTEMU $\mu = 0$ IMAMO: JEDNU DIF. JED. KRETANJA DRUGOG REDA I JEDAN PRVI INTEGRAL (DIF. JED. PRVOG REDA) T.J. IMAMO "REDUKOVAN" SISTEM!