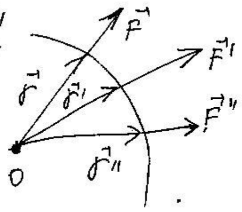
PRIMENA LAGRANŽEVIH DIF. JED. II VRSTE NA CENTRALNO KRETANJE

KRETANJE ČESTICE (MATERIJALNE TAČKE MASE m) PRI KOME SILA KOJA DEJSTVUJE NA NJU PROLAZI STALNO KROZ JEDNU TAČKU PROSTORA NAZIVA SE "CENTRALNO KRETANJE", A ODGOVARAJUĆA SILA "CENTRALNA SILA". $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})^{(*)}$



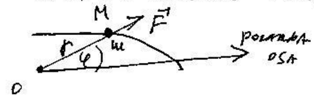
OVA VRSTA KRETANJA JE OD VELIKOG ZNAČAJA, JER U TAKVE SILE SPADAJU GRAVITACIONE I ELEKTRIČNE SILE.

* * *

POGLEDATI HANDOUTS GDE SE ZA POSMATRANJE OVOG KRETANJA KORISTE TEOREMA O PROMENI MOMENTA KOLIČINE KRETANJA I TEOREMA O PROMENI KINETIČKE ENERGIJE.

* * *

ISTO KRETANJE NARAVNO MOŽEMO PRATITI I LAGRANŽEVIM DIF. JED. II VRSTE.
POŠTO ZADATAK (TEORIJSKI) IMA DVA STEPENA SLOBODE KRETANJA NEKA SU GENERALISANE KOORDINATE (POLARNE KOORDINATE): "r", "φ"



A ODGOVARAJUĆE JEDNAČINE SU:

$$(1)\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot r} - \frac{\partial T}{\partial r} = Q_r \qquad (2)\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi \qquad T = \frac{1}{2}mV_M^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot r} = m\dot r \qquad \frac{\partial T}{\partial r} = mr\dot\varphi^2 \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} = mr^2\dot\varphi \qquad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$$

$$\delta A = \vec{F}\cdot\delta\vec{r} = f(r)\frac{\vec{r}}{r}\cdot\delta\vec{r} = f(r)\delta r \Rightarrow Q_r = f(r) \qquad Q_\varphi = 0$$

POŠTO JE $Q_\varphi = 0$, $\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow$ "φ" JE CIKLIČNA KOORDINATA PA POSTOJI PRVI INTEGRAL T.J. OVAJ SISTEM JE "REDUKOVAN".

$$\begin{cases} (1)\ m\ddot r - mr\dot\varphi^2 = f(r) \\ (2)\ mr^2\dot\varphi = const.^{(**)} \end{cases}$$

U OPŠTEM SLUČAJU SISTEM JE INTEGRABILAN. SVAKI PROBLEM (ZADATAK) SA CENTRALNOM SILOM MOŽE SE REŠAVATI NA OPISAN NAČIN. POGLEDATI DVA ZADATKA U PRILOGU.

ZBOG PRAKTIČNIH ELEMENATA VEZANIH ZA TRAJEKTORIJE PLANETA I SATELITA OD POSEBNOG INTERESA JE SAMA "LINIJA PUTANJE"; ZATO SE IZ JEDNAČINE (1) I (2) ELIMINIŠE "t" (VREME) [POGLEDATI HANDOUTS] DIFERENCIJALNA JEDNAČINA PUTANJE T.ZV. "BINEOV" OBRAZAC:

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = -\frac{mr^2 f(r)}{M^2}$$

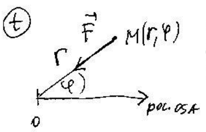
(*) $\boxed{\text{NAPOMENA}}$: U OPŠTEM SLUČAJU I OVE SILE MOGU BITI FUNKCIJA NE SAMO OD $\vec{r}$, VEĆ I OD BRZINE I VREMENA T.J. $\vec{F}(\vec{r}, \vec{V}, t)$. MEĐUTIM ZBOG MAKROSKOPSKIH IZRAZA ZA NAJČEŠĆE KORIŠĆENE (U PRAKSI) OD NAJVEĆEG SU INTERESA TAKVE SILE ČIJI INTENZITET ZAVISI SAMO OD INTENZITETA VEKTORA POLOŽAJA T.J. $\vec{F}(r\vec{r}_0) \equiv f(r)\vec{r}_0$

(**) $\frac{d}{dt}(mr^2\dot\varphi) = 0 \Rightarrow mr^2\dot\varphi = const.$

Primena Lagranževih jednačina druge vrste
na
(1) kretanje materijalne tačke pod dejstvom centralne sile:

1. Materijalna tačka M jedinične mase kreće se pod dejstvom centralne privlačne sile čiji je intenzitet $F=\frac{mk^2}{r^3}$. Odrediti za tačku M, u odnosu na date generalisane koordinate r, φ: 1) diferencijalne i konačne jednačine kretanja, 2) putanju. U početnom trenutku $t_0=0$, $r_0=2$, $\varphi_0=0$, $V_0=1/2$, a ugao između brzine i potega bio 45°. Neka je k=1; zadate veličine su date u osnovnim jedinicama SI sistema.

(t)

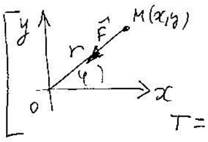


$$\begin{cases} q_1 = r \\ q_2 = \varphi \end{cases}$$

$$(1)\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot r} - \frac{\partial T}{\partial r} = Q_r \qquad (2)\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} - \cancel{\frac{\partial T}{\partial \varphi}}^{\,0} = \cancel{Q_\varphi}^{\,0} \qquad (m=1;\ k=1)$$

$$dA = \vec F \cdot d\vec r = \left[\frac{f(r)}{}\left(\frac{\vec r}{r}\right)\right]\cdot d\vec r = f(r)\,dr \qquad \begin{cases} Q_r = f(r) = -\frac{mk^2}{r^3} = -\frac{1}{r^3} \\ Q_\varphi = 0 \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2\right)$$



$$\begin{cases} x = r\cos\varphi & \dot x = \dot r\cos\varphi - r\dot\varphi\sin\varphi \\ y = r\sin\varphi & \dot y = \dot r\sin\varphi + r\dot\varphi\cos\varphi \end{cases}$$

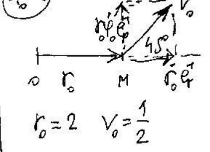
$$T = \frac{1}{2}m(\dot x^2 + \dot y^2) = \frac{1}{2}m(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot r} = m\dot r \qquad \frac{\partial T}{\partial r} = mr\dot\varphi^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} = mr^2\dot\varphi \qquad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$$

$$\begin{cases} (1)\ \ m\ddot r - mr\dot\varphi^2 = -\frac{1}{r^3} \\ (2)\ \ \frac{d}{dt}(mr^2\dot\varphi) - 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2\dot\varphi = r_0^2\dot\varphi_0 = \frac{\sqrt2}{2} \quad \Rightarrow \quad \dot\varphi = \frac{\sqrt2}{2r^2} \Rightarrow (1) \end{cases}$$

$(t_0=0)$



$r_0 = 2 \quad V_0 = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} \dot r_0 = V_0\frac{\sqrt2}{2} \\ r_0\dot\varphi_0 = V_0\frac{\sqrt2}{2} \quad \dot\varphi_0 = \frac{\sqrt2}{8} \end{cases}$$

$$m=1 \qquad \ddot r - r\left(\frac{\sqrt2}{2r^2}\right)^2 = -\frac{1}{r^3}$$

$$\ddot r = -\frac{1}{2r^3} \qquad \ddot r = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right)\frac{dr}{dr} = \dot r\frac{d\dot r}{dr}$$

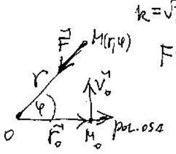
$$\int \dot r\,d\dot r = -\int\frac{dr}{2r^3} \qquad \frac{\dot r^2}{2} = \frac{1}{4r^2} + C_1 \qquad \frac{\dot r_0^2}{2} = \frac{1}{4r_0^2} + C_1 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\dot r^2 = \frac{1}{2r^2} \qquad \dot r = \frac{1}{\sqrt2\, r} \qquad \int r\,dr = \int\frac{dt}{\sqrt2} \qquad \frac{r^2}{2} = \frac{t}{\sqrt2} + C_2 \qquad \frac{r_0^2}{2} = 0 + C_2 \qquad C_2 = 2$$

$$r^2 = \sqrt2 t + 4 \qquad \dot\varphi = \frac{\sqrt2}{2r^2} \qquad \int d\varphi = \int\frac{\sqrt2\,dt}{2(\sqrt2 t + 4)}$$

$$\begin{cases} \varphi = \frac{1}{2}\ln(2t + 4\sqrt2) \\ r = \sqrt{\sqrt2 t + 4} \end{cases} \Rightarrow \boxed{r^2 = e^{2\varphi}}$$

2. Materijalna tačka M mase m kreće se pod dejstvom centralne privlačne sile čiji je intenzitet $F=\frac{mk^2}{r^7}$. Odrediti za tačku M, u odnosu na date generalisane koordinate r, φ: 1) diferencijalne i konačne jednačine kretanja, 2) putanju. U početnom trenutku $t_0=0$, $r_0=1$, $\varphi_0=0$, $V_0=1$, a ugao između brzine i potega bio 90°. Neka je $k^2=3$; zadate veličine su date u osnovnim jedinicama SI sistema.



$k=\sqrt{3}$

$F=\frac{mk^2}{r^7}$

$(1)\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot r}-\frac{\partial T}{\partial r}=Q_r \qquad (2)\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}\right)-\cancel{\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi}\right)}^{0}=\cancel{Q_\varphi}^{0} \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}=const$

$dA=f(r)dr \quad \begin{cases} Q_r=f(r)=-\frac{mk^2}{r^7}=-\frac{(\sqrt{3})^2 m}{r^7} \\ Q_\varphi=0 \end{cases}$

$\begin{cases} V_0=1 \quad r_0=1 \quad \varphi_0=0 \\ \dot r_0=0 \quad r_0\dot\varphi_0=V_0 \Rightarrow \dot\varphi_0=1 \end{cases}$

$T=\frac{1}{2}m(\dot r^2+r^2\dot\varphi^2) \quad \frac{\partial T}{\partial \dot r}=m\dot r \quad \frac{\partial T}{\partial r}=mr\dot\varphi^2 \quad \frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}=m\dot\varphi r^2 \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi}=0$

$\begin{cases} (1)\ m\ddot r-mr\dot\varphi^2=-\frac{m(\sqrt{3})^2}{r^7} \\ (2)\ r^2\dot\varphi=r_0^2\dot\varphi_0=1 \quad \dot\varphi=\frac{1}{r^2} \end{cases} \quad \ddot r-r\left(\frac{1}{r^2}\right)^2=-\frac{(\sqrt{3})^2}{r^7} \quad \Rightarrow \int \dot r d\dot r=\int\left(\frac{1}{r^3}-\frac{3}{r^7}\right)dr$

$\frac{\dot r^2}{2}=-\frac{1}{2r^2}+\frac{1}{2r^6}+c_1 \quad (c_1=0) \qquad \dot r^2=\frac{(1-r^4)}{r^6} \Rightarrow \int\frac{r^3}{\sqrt{1-r^4}}dr=\int dt$

$r^4=1-4t^2+c_2 \quad (r_0^4=1-0+c_2 \Rightarrow c_2=0)$

$(2)\Rightarrow \int d\varphi=\int\frac{dt}{\sqrt{1-4t^2}}$

$\begin{cases} r^4=1-4t^2 \\ \varphi=\frac{1}{2}\arcsin(2t)+\cancel{c_3}^{0} \end{cases} \Rightarrow \boxed{r^2=\cos 2\varphi}$

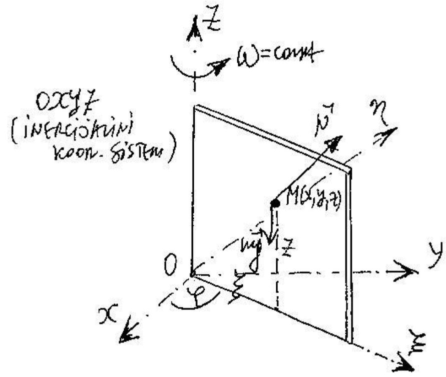
$\sin(2\varphi)=2t \quad r^4=1-(\sin 2\varphi)^2 \Rightarrow$

Primena Lagranževih jednačina druge vrste
na
(2) relatvno kretanje materijalne tačke:

U *handouts* se problemu relativnog kretanja pristupa iz ugla vektorske dinamike – uvode se neinercijalni koordinatni sistemi – i dve fiktivne sile (ne-Njutnovske sile*): "prenosna inercijalna" i "Koriolisova inercijalna"**.
Naravno da taj fenomen možemo rešavati i Lagranževim formalizmom: elemente kretanja pomoću Lagranževih jednačina druge vrste, a reakcije veza (ako se traže) pomoću Lagranževih jednačina prve vrste (tzv. jednačinama sa množiocem veza). Prikažimo to na tri primera koja slede.

Napomene:
*) sile koje nemaju izvor u masama.
**) u inercijalnom sistemu kretanje svake tačke (tela) u odsustvu sila odvija se pravolinijski i jednoliko. Gravitaciono polje (polje teže) ima osobinu (ako su isti početni uslovi) da se svaka tačka, bez obzira na masu, kreće na isti način. Ova osobina gravitacionog polja nam pomaže da napravimo fizičku sliku neinercijalnog sistema – "neinercijalni sistem ekvivalentan je konvencionalnom gravitacionom polju" (to je princip ekvivalentnosti), tj. "neinercijalni sistem možemo shvatiti kao inercijalni u kome istovremeno postoji (dejstvuje) i gravitaciono polje"! To "veštačko gravitaciono polje" se u jednom elementu bitno razlikuje od pravog gravitacionog polja – u beskonačnosti: pravo gravitaciono polje u beskonačnosti teži nuli, a ovo "konvencionalno gravitaciono polje" se u beskonačnosti neograničeno uvećava (ili ostaje konačno po veličini).

1. Materijalna tačka M, mase m, može da se kreće bez trenja po ravni $\xi 0z$. Ravan $\xi 0z$ obrće se oko nepomične ose oz konstantnom ugaonom brzinom ω. U početnom trenutku $t_o=0$, tačka M je bila u miru (u odnosu na ravan $\xi 0z$) u položaju $M_o(\xi_o=5,\ z_o=0)$. Odrediti opšte jednačine kretanja tačke M u odnosu na pokretni koordinatni sistem $\xi 0z$. Uzeti da su generalisane koordinate: ξ, z.



$$\left\{ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha \right\}$$

$$T = \frac{1}{2} m v^2_{M_{aps}} = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$\begin{cases} q_1 = \xi \\ q_2 = z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \xi\cos\varphi & \dot{x} = \dot{\xi}\cos\varphi - \xi\dot{\varphi}\sin\varphi \\ y = \xi\sin\varphi & \dot{y} = \dot{\xi}\sin\varphi + \xi\dot{\varphi}\cos\varphi \\ z = z & \dot{z} = \dot{z} \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{\xi}^2 + \xi^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} = m\dot{\xi} \qquad \frac{\partial T}{\partial \xi} = m\xi\omega^2 \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \qquad \frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

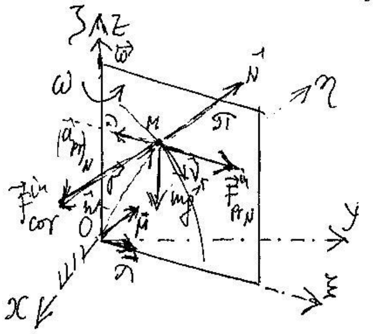
$$\delta A = -mg\,\delta z \quad \{ Q_\xi = 0 \ ,\ Q_z = -mg \}$$

$$\begin{cases} m\ddot{\xi} - m\omega^2\xi = 0 \\ m\ddot{z} - 0 = -mg \end{cases}$$

$$M: \begin{cases} \xi = C_1 \operatorname{ch}\omega t + C_2 \operatorname{sh}\omega t \\ z = -g\frac{t^2}{2} + C_3 t + C_4 \end{cases}$$

REŠIMO ZADATAK VEKTORSKIM METODOM

Materijalna tačka M, mase m, može da se kreće bez trenja po ravni $\xi 0z$. Ravan $\xi 0z$ obrće se oko nepomične ose oz konstantnom ugaonom brzinom ω. U početnom trenutku $t_o=0$, tačka M je bila u miru (u odnosu na ravan $\xi 0z$) u položaju $M_o(\xi o=5,\ z_o=0)$. Odrediti opšte jednačine kretanja tačke M u odnosu na pokretni koordinatni sistem $\xi 0z$. Uzeti da su generalisane koordinate: ξ, z.



OXYZ INERCIJALNI SISTEM $m\ddot{\vec r} = m\vec g + \vec N$ (DRUGI AKSIOM DINAMIKE)

$\ddot{\vec r}$ UBRZANJE U ODNOSU NA INERCIJALNI SISTEM ("APSOLUTNO" UBRZANJE)

$m\vec g$ "AKTIVNA SILA" ZEMLJINE TEŽE; $\vec N$ "REAKCIJA" IDEALNE VEZE.

PREMA KORIOLISOVOJ TEOREMI (IZ KINEMATIKE) SVAKO APSOLUTNO UBRZANJE MOŽE BITI DATO VEKTORSKIM ZBIROM: RELATIVNOG, PRENOSNOG, KORIOLISOVOG: $\ddot{\vec r} = \ddot{\vec \xi}_{rel} + \ddot{\vec r}_{pr} + \ddot{\vec r}_{cor}$

$\ddot{\vec r}_{prenosno} = \vec a_{pr(translat)} + \vec\omega \times (\vec\omega \times \vec\xi) + \vec\varepsilon \times \vec\xi \qquad \ddot{\vec r}_{cor} = 2(\vec\omega \times \vec V_{rel})$

$\ddot{\vec\xi}_{rel}$ UBRZANJE U ODNOSU NA KOORDINATNI SISTEM VEZAN ZA TELO KOJE SE $\boxed{\text{KREĆE}}$ (KOD NAS ROTIRA OKO OSE $O\zeta \equiv Oz$) T.J. U ODNOSU NA $\boxed{\text{"NEINERCIJALNI KOOR. SISTEM"}}$ $\boxed{O\zeta\eta\xi}$

$$(*)\quad m(\ddot{\vec\xi}_{rel} + \ddot{\vec r}_{pr} + \ddot{\vec r}_{cor}) = m\vec g + \vec N \Rightarrow m\ddot{\vec\xi}_{rel} = m\vec g + \vec N \underbrace{\boxed{-m\ddot{\vec r}_{pr}}}_{\vec F^{in}_{pr}} \underbrace{\boxed{-m\ddot{\vec r}_{cor}}}_{\vec F^{in}_{cor}}$$

$$\vec F^{in}_{pr} = -m\ddot{\vec r}_{pr} \qquad \vec F^{in}_{cor} = -m\ddot{\vec r}_{cor}$$

ZADATAK DALJE REŠAVAMO U NEINERCIJALNOM KOOR. SISTEMU $O\zeta\eta\xi$ GDE PORED AKTIVNIH SILA I SILA REAKCIJA VEZA DEJSTVUJU I DVE "NENJUTNOVSKE" SILE T.J. "INERCIJALNE" PRENOSNA I KORIOLISOVA. U NAŠEM PRIMERU: $\omega = const \Rightarrow \varepsilon = 0$ TAKOĐE $a_{p(tr)} = 0$ (TELO ROTIRA)

PA JE $\ddot{\vec r}_{pr} = \underbrace{\vec\omega \times (\vec\omega \times \vec\xi)}_{(a_{pr})_N}$ | U KINEMATICI SMO OVO UBRZANJE OBELEŽILI SA $(a_{pr})_N = \xi\omega^2$ ("$\vec a_{pN}$" IDE NAJKRAĆIM PUTEM DO OSE ROTACIJE)

PA JE $|\vec F^{in}_{pr_N}| = m\omega^2\xi$ (PO SMERU SUPROTNA OD VEKTORA UBRZANJA)

$\ddot{\vec r}_{cor} = 2(\vec\omega \times \dot{\vec\xi})$ ($\ddot{\vec r}_{cor} \perp \pi$) $\qquad \vec F^{in}_{cor} = -m\ddot{\vec r}_{cor}$

$$(*)\quad m\ddot{\vec\xi}_r = m\vec g + \vec N + \vec F^{in}_{pN} + \vec F^{in}_{cor} \quad \Big/ \cdot\vec\lambda, \ \cdot\vec k$$

$$\left\{\begin{array}{l} m\vec g\cdot\vec\lambda = 0 \\ \vec N\cdot\vec\lambda = 0 \\ \vec F^{in}_{cor}\cdot\vec\lambda = 0 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \vec F^{in}_{pN}\cdot\vec\lambda = F^{in}_{pN} \\ \ddot{\vec\xi}_r\cdot\vec\lambda = \ddot\xi \end{array}$$

$(*)\,\vec\lambda \Rightarrow \boxed{m\ddot\xi = m\omega^2\xi}$

$(*)\,\vec k \Rightarrow \boxed{m\ddot z = -mg}$

$$\left\{\begin{array}{l} \vec N\cdot\vec k = 0 \\ \vec F^{in}_{cor}\cdot\vec k = 0 \\ \vec F^{in}_{pN}\cdot\vec k = 0 \end{array}\right. \qquad m\vec g\cdot\vec k = -mg$$

INTEGRACIJA JE DALJE ISTA KAO I U ANALITIČKOJ LAGRANŽEVOJ METODI.

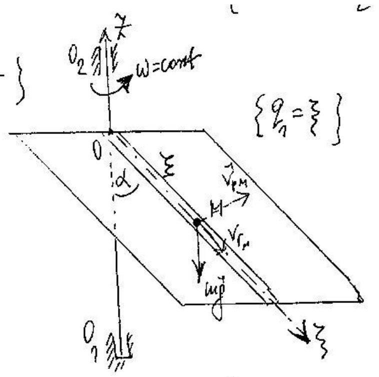
$\boxed{\text{NAPOMENA}}$: $\vec V_r \equiv \dot{\vec\xi} = \dot\xi\vec\lambda + \dot\eta\vec\mu + \dot\zeta\vec\nu$ ($\dot\eta = 0$; $\zeta = z$) | $\vec V_r = \dot\xi\vec\lambda + \dot z\vec\nu$; $\vec\omega \equiv \vec\omega_{prenosne\ rotacije} = \omega\vec k$

POŠTO JE $\vec V_{rel}$ U RAVNI π I $\vec\omega = \omega\vec k$ SLEDI DA JE $\vec F^{in}_{cor} \perp \pi$

AKO BI JEDNAČINU $(*)\cdot\vec\mu$ (PROJEKTOVALI NA $O\eta$ OSU) $\Rightarrow \boxed{N = F^{in}_{cor}}$ ($m\vec g\cdot\vec\mu = 0$, $\vec F^{in}_{pN}\cdot\vec\mu = 0$) ($\ddot\eta = 0$).

2. Ploča (u kojoj je izdubljen glatki kanal) zavarena je pod uglom α (α=const) za vertikalnu osovinu i obrće se oko vertikalne nepomične ose $0_1 0_2$ konstantnom ugaonom brzinom ω. Kroz kanal može da se kreće tačka M mase m. Uzeti da je generalisna koordinata ξ (za kanal je vezana pokretna osa 0ξ), pa odrediti opštu jednačinu relativnog kretanja tačke M, tj. ξ (t)=?

$\{\alpha = const\}$



$\{q_1 = \xi\}$

$$T = \frac{1}{2} m V_{M_{aps}}^2$$

$V_{r_M} = \dot{\xi}$ $\quad$ $(\vec{V}_{r_M} \perp \vec{V}_{p_M})$

$V_{pM} = \xi \omega \sin\alpha$

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{\xi}^2 + \omega^2 \xi^2 \sin^2\alpha\right)$$

$-z = \cos\alpha\, \xi$

$-\delta z = \cos\alpha\, \delta\xi$

$$\delta A = -mg\,\delta z = mg\cos\alpha\,\delta\xi$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} = m\dot{\xi} \qquad \frac{\partial T}{\partial \xi} = m\omega^2 \xi \sin^2\alpha \qquad Q_\xi = mg\cos\alpha$$

$$m\ddot{\xi} - (m\omega^2 \sin^2\alpha)\xi = mg\cos\alpha$$

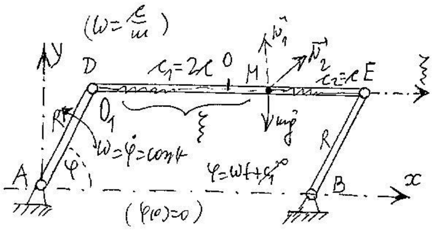
$$\left\{ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} - \frac{\partial T}{\partial \xi} = Q_\xi \right\}$$

$$\ddot{\xi} - (\omega^2 \sin^2\alpha)\xi = g\cos\alpha$$

$$M: \left\{ \xi = C_1 ch(\omega \sin\alpha\, t) + C_2 sh(\omega \sin\alpha\, t) - \frac{g\cos\alpha}{(\omega \sin\alpha)^2} \right.$$

3. Krivaja AD (AD=BE=R) obrće se konstantnom ugaonom brzinom ω i dovodi u kretanje cev DE (DE=2R, DO=OE=R). Veze u tačkama A, B, D i E su zglobne. Unutar glatke cevi DE može da se kreće tačka M mase m, vezana za dve opruge DM i ME, krutosti c_1=2c c_2=c. U t_o=0 tačka M je u koordinatnom početku relativne koordinatne ose 0ξ s relativnom brzinom $R\omega_o$ (opruge su tada bile nenapregnute); odrediti opštu jednačinu relativnog kretanja tačke M, tj. ξ (t)=? Uzeti da je generalisna koordinata ξ. Sistem je u vertikalnoj ravni, $\varphi(0)=0$.

$(\omega = \frac{c}{m})$



$\{q_1 = \xi\}$ $\quad$ $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} - \frac{\partial T}{\partial \xi} = Q_\xi$

$$T = \frac{1}{2} m V_M^2 = \frac{1}{2} m \left(\dot{\xi}^2 + R^2\dot{\varphi}^2 - 2R\dot{\varphi}\dot{\xi}\sin\varphi\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} = \dot{\xi} m - mR\dot{\varphi}\sin\varphi$$

$\{Axy$ inercijalni koor. sistem$\}$ $\quad$ $M: \begin{cases} x = R\cos\varphi + \xi \\ y = R\sin\varphi \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} \dot{x} = -R\dot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\xi} \\ \dot{y} = R\dot{\varphi}\cos\varphi \end{cases}$

$$\delta A = -F_{e1}\delta\xi - F_{e2}\delta\xi \qquad F_{e1} = c_1\xi \qquad F_{e2} = c_2\xi$$

$$Q_\xi = -3c\xi$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} = m\ddot{\xi} - m\underset{0}{R\ddot{\varphi}}\sin\varphi - mR\dot{\varphi}^2\cos\varphi$$

$$m\ddot{\xi} - mR\dot{\varphi}^2\cos\varphi - 0 = -3c\xi$$

$$\ddot{\xi} + \left(\frac{3c}{m}\right)\xi = R\dot{\varphi}^2\cos(\omega t) \qquad \left(k^2 = \frac{3c}{m}\right)$$

$$\xi = C_1\cos\sqrt{\frac{3c}{m}}\,t + C_2\sin\sqrt{\frac{3c}{m}}\,t + \frac{mR\omega^2}{2c}\cos(\omega t)$$